

## Mathematik 2 für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 24.07.23

---

### 13.4.1 Kenngrößen von Zufallsvariablen

**Vorbemerkung:** Ähnlich wie bei Ereignissen definieren wir für Zufallsvariablen...

(stochastische) Unabhängigkeit <https://youtu.be/TQSS17-9Sz4> (1 min) (1)

---

**Definition:** Sei  $X$  eine ZV auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- Ist  $X$  diskret, und gilt  $\sum_{x_i \in X(\Omega)} |x_i| P(X=x_i) < \infty$ , so nennen wir

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X=x_i) \quad \text{den Erwartungswert von } X. \quad (2)$$

- Ist  $X$  stetig mit Dichte  $f_X$ , und gilt  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$ , so nennen wir

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad \text{den Erwartungswert von } X. \quad (3)$$

**Beispiele:**

Faires Würfeln <https://youtu.be/8oFATL4oUaU> (2 min) (4)

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow E(X) = np \quad (\text{siehe ÜA 47}) \quad (5)$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu \quad (\text{siehe ÜA 47}) \quad (6)$$

**Rechenregeln:**

Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen und seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt *immer*

$$E(aX+b) = aE(X) + b \quad \text{und} \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y). \quad (7)$$

Sind  $X, Y$  stochastisch *unabhängig*, so gilt außerdem

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y). \quad \text{https://youtu.be/Tqj0n5hu0Bo} \quad (4 \text{ min}) \quad (8)$$

---

**Definition:** Sei  $X$  eine ZV mit Erwartungswert  $\mu = E(X)$ . Falls  $E(X^2)$  existiert, so heißt

$$\text{Var}(X) = E((X-\mu)^2) \quad \text{Varianz von } X.$$

**Bemerkungen:**

Wir nennen  $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$  die **Standardabweichung** von  $X$ . (9)

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \text{https://youtu.be/MI7ZQJkcG0k} \quad (2 \text{ min}) \quad (10)$$

**Beispiele:**

Faires Würfeln <https://youtu.be/8jTSzVASd6k> (3 min) (11)

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow \text{Var}(X) = np(1-p) \quad (\text{siehe ÜA 47}) \quad (12)$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \text{Var}(X) = \sigma^2 \quad (\text{siehe ÜA 47}) \quad (13)$$

**Rechenregeln:**

Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen und seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt *immer*

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X). \quad (14)$$

Sind  $X, Y$  stochastisch *unabhängig*, so gilt außerdem:

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y). \quad \text{https://youtu.be/8ScAq--cc8k} \quad (3 \text{ min}) \quad (15)$$

---

**Satz. (Tschebyscheff'sche Ungleichung)**

Sei  $X$  eine ZV, für die  $\mu = E(X)$  und  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$  existieren. Dann gilt

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \quad \forall a > 0. \quad (16)$$

**Beweis:** <https://youtu.be/meeu6uWwoe4> (6 min) (17)

Überlegen Sie, wie der Beweis für diskrete ZVn geht. HINWEIS: Summen statt Integrale.

---

## 13.6 Grenzwertsätze

**Schauen Sie** zunächst dem schwachen Gesetz der großen Zahlen bei der Arbeit zu.

**Satz. (Schwachtes Gesetz der großen Zahlen)**

Sei  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger ZVn, die alle die gleiche Verteilung haben (kurz: iid), mit  $E(X_k) = \mu$  und  $\text{Var}(X_k) = \sigma^2 \forall k$ . Dann gilt für  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

**Kurz:** Der Mittelwert strebt gegen den Erwartungswert.

Relative Häufigkeiten streben gegen Wahrscheinlichkeiten.

**Beweis:** <https://youtu.be/-8Fv9LaugvE> (6 min) (18)

Und wie schnell geht das? Leider nur proportional zu  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , aber immerhin. Und warum? Wir sehen das bereits im Beweis des schwachen Gesetzes der großen Zahlen. Schärfere Aussagen liefert:

**Satz. (Zentraler Grenzwertsatz)**

Sei  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger ZVn, die alle die gleiche Verteilung haben (d.h. iid), mit  $E(X_k) = \mu$  und  $\text{Var}(X_k) = \sigma^2 \forall k$ . Dann gilt für  $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - \mu}{\sigma}$ :

$$Z_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{N}(0, 1). \quad (19)$$

(ohne Beweis)

**Bemerkungen:** <https://youtu.be/9PHeA11TVJM> (6 min) (20)