Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2023

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 5 (Abgabe spätestens 25.05.2023, 10:00)

Aufgabe 18 (4 Punkte)
Geben Sie für jede der Matrizen aus Aufgabe 16 an, ob sie diagonalisierbar ist – mit minimaler(!) Begründung.

Aufgabe 19 (5+5 = 10 Punkte)

a) Führen Sie die HAT für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T AU$ an.

b) Berechnen Sie e^{Bx} für $x \in \mathbb{R}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Hinweis: Diagonalisieren Sie dazu die Matrix B, d.h. gehen Sie vor wie in https://youtu.be/GkyDmVo_TY4.

Aufgabe 20 (3+3+4 = 10 Punkte)
Wir nennen

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}\,, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}\,,$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von $\vec{y}$ Funktionen von x, und $\vec{y}\,'$ ist die komponentenweise Ableitung nach x, d.h.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}\,, \quad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}\,.$$

a) Rechnen Sie nach: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{u}$, so ist

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes $\vec{y}$ der Form

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{Ax}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, mit A aus Aufgabe 19.

Aufgabe 21 (10 Zusatzpunkte)

Wir schreiben die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{$*$}$$

als ein DGL-System 1. Ordnung (vgl. Vorlesung vom 27.04.23). Definieren Sie dazu

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} ,$$

und suchen Sie eine Matrix A, so dass $\vec{u}\,' = A\vec{u}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.

Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare). Schreiben Sie nun die DGL aus Aufgabe 15 als DGL-System 1. Ordnung. Vergleichen Sie auch hier das charakteristischen Polynom der DGL mit dem charakteristischen Polynom der im DGL-System auftretenden Matrix.