Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2023

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 6 (Abgabe 08.06.2023)

Aufgabe 22 (20 Punkte)
Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 1$
b) $2y^2 - 7x^2 + 12xy = 1$
c) $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 5$
d) $12x^2 + 36xy + 27y^2 = \frac{1}{3}$

Aufgabe 23 (3 Zusatzpunkte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$.

Aufgabe 24 (8+3+5 = 16 Punkte)
Gegeben sei die quadratische Form

$$q_A(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2ax_2x_3\,, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a?
b) Für welchen Wert von a ist $\vec{v} = (1, 0, 1)^T$ eine Hauptachsenrichtung von q_A (d.h. ein Eigenvektor von A)?
c) Bestimmen Sie für den a-Wert aus (b) die Hauptachsenform für q_A, d.h. bestimmen Sie eine Koordinatentransformation $\vec{y} = U^T\vec{x}$, U orthogonal, und eine Diagonalform q_D mit $q_A(\vec{x}) = q_D(\vec{y})$.

Aufgabe 25 (5+3+2 = 10 Punkte)
Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z. Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4} \right\}\,.$$

a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} = \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy-Ebene.
b) Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.
c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

Hinweis: Wenn Sie in (a) die Gleichung, die ein Punkt erfüllen muss, damit er sowohl in T als auch in einer Koordinatenebene liegt, etwas umstellen, kommen stets Kreise zum Vorschein.