Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2023

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 8 (Abgabe spätestens 22.06.2023, 10:00)

Aufgabe 29 (2+2+2+6 = 12 Punkte)
Wir betrachten nochmal die Funktionen f und q aus Aufgabe 26.

a) Für welche $\vec{x}$ sind f und q total differenzierbar? Geben Sie dort ∇f und ∇q an.
b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (1, 1, \pi)^T$ in Richtung von $(1, 1, 1)^T$.
c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von q an der Stelle $\vec{x}_0 = (1, -1, 0)^T$ in Richtung von $(1, 1, -1)^T$.
d) Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen und geben Sie die Hesse-Matrizen $f''(\vec{x})$ und $q''(\vec{x})$ an.

Aufgabe 30 (10 Punkte)
Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$, $j = 1, 2, 3$, für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,
b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und
c) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Geben Sie auch jeweils den Anfangs- und den Endpunkt des Integrationswegs an.
Ist $\vec{f}$ konservativ, d.h. gibt es ein $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{f} = \nabla F$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 31 (10 Zusatzpunkte)
Bestimmen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$, $j = 1, 2$, für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^{xz} - 2x\cos(x^2 + y^2) \\ \mathrm{e}^{-y^2} - 2y\cos(x^2 + y^2) \\ x\mathrm{e}^{xz} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

$$\text{sowie} \quad \mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \log(1 + 3t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Zeichnen Sie außerdem $\mathfrak{K}_1$.

Aufgabe 32 (15 Punkte)

Wenn wir $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können wir auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $\vec{f} : M \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))^T$ definieren wir

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{(Divergenz)}$$

$$\text{und speziell für } n = 3 \quad \operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{(Rotation).}$$

Im Fall $n = 3$ schreiben wir statt x_1, x_2, x_3 auch gerne x, y, z.

Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div}\vec{f}$, $\operatorname{rot}\vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z + y\cos z \\ x + y \\ y\sin(xz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$