Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2023

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 9 (Abgabe spätestens 29.06.2023, 10:00)

Aufgabe 33 (3+4+3= 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{xy}}{1-x^2}$ um $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x,y,z) = \sin(xz) - \cos(y) + xy(z-1)^{23}$ und $g(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^y \sin x}{1+x^2}$.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt $(1,0,-1)$ von

$$f(x,y,z) = x^3 - 3x^2 + y^2 + 4yz + 2z + 3x + 23\,.$$

Hinweis: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 34 (8+7 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen

$$f(x,y) = (x-2y)^4 - 7(x^2+4y^2) + 36xy \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = x^2 - x^4 + \cos(y)\,,$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$ (bzw. $\nabla g = 0$). Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 35 (Fortsetzung von Aufgabe 17) (12 Zusatzpunkte)

Die Lösung von Aufgabe 17c war ein DGL-System der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} = f\big(s(t), c(t)\big)$$

mit einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) Wählen Sie positive Parameter k_1, k_2, k_3 und e_0. Visualisieren Sie die Funktion f, indem Sie in der sc-Ebene an Punkten mit den Koordinaten (s, c) Pfeilchen $f(s, c)$ einzeichnen. Wählen Sie den Bereich in der sc-Ebene sinnvoll. Wählen Sie die absolute Länge der Pfeile beliebig aber sinnvoll, die relative Länge der Pfeile muss stimmen.
HINWEIS: Sie dürfen zum Zeichnen auch einen Computer verwenden. Tippen Sie z.B. auf `www.wolframalpha.com` den Ausdruck `vector field plot` ein: Sie sehen dann genau so eine Visualisierung einer (anderen) Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, und es wird Ihnen ein Formular angezeigt, in dem Sie die Funktion und den Plot-Bereich eingeben können.

Lösungen des DGL-Systems entsprechen Kurven in der sc-Ebene, deren Tangentialvektoren (“Geschwindigkeitsvektoren”) an jeder Stelle durch die Pfeilchen des Plots aus Teil a gegeben sind. (Warum?)

b) Zeichnen Sie zwei oder drei Lösungen des DGL-Systems für Anfangsbedingungen der Form $\big(s(0), c(0)\big) = (s_0, 0)$, mit $s_0 > 0$, in Ihr(e) Diagramm(e) aus Teil a ein. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabe 17f.

Es gilt $f(0, 0) = \binom{0}{0}$, d.h. $\big(s(t), c(t)\big) = (0, 0)\ \forall\, t$ ist eine Lösung des DGL-Systems.[1] Für kleine s und c approximieren wir das DGL-System durch das lineare DGL-System (warum?)

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = f'(0, 0) \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} .$$

c) Bestimmen Sie $f'(s, c)$.
d) Untersuchen Sie $f'(0, 0)$ auf Definitheit.
e) Wie sehen verschiedene Lösungen des linearen DGL-Systems (qualitativ) aus?
HINWEIS: Denken Sie dabei v.a. an Aufgabe 20a.
f) Wo und wie manifestiert sich das Verhalten aus Teil e in dem/den Plot(s) aus Teil a?

[1] Wir nennen daher $(0, 0)$ einen Fixpunkt des DGL-Systems.