Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2023

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 10 (Abgabe spätestens 06.07.2023, 10:00)

Aufgabe 36 (5 Zusatzpunkte)
Ist $y + xy^2 + \cos(xy) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sie ggf. auch $f'(0)$.

Aufgabe 37 (10 Punkte)
Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach $\vec{y} = f(\vec{x})$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

auflösen lässt, und berechnen Sie $f'(0, -1)$.

Aufgabe 38 (10 Zusatzpunkte)
Für Umgebungen welcher Punkte (x_0, y_0) lässt sich die Gleichung

$$x^2 = y^2 + y^3$$

jeweils lokal nach y auflösen? Und wo lässt sie sich lokal nach x auflösen? Illustrieren Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll in einem Diagramm.

Aufgabe 39 (10 Punkte)
Für welche $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?[1] Berechnen Sie auch $f^{-1\prime}(0, 2, 0)$; geben Sie an, welchen Zweig Sie dabei gewählt haben (d.h. aus welchem Bereich bei Ihnen r, ϑ und φ stammen).

Aufgabe 40 (10 Zusatzpunkte)
Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(x, y, z) = xyz$ auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Wo wird das Minimum angenommen?

---

[1] Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} r(x, y, z) \\ \vartheta(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) \end{pmatrix}$?

Aufgabe 41 (15 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2+2x-2y}$.

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

b) Bestimmen Sie alle potentiellen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$. Entscheiden Sie, ob es sich tatsächlich um Minima oder Maxima handelt.

c) Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$. Bestimmen Sie $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$ und $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$.

Hinweis: Denken Sie neben Satz 36 (Lagrange-Multiplikatoren) auch an Satz 27 (Min/Max stetiger Funktionen auf Kompaktum).