

## Mathematik 2 für Naturwissenschaftler\*innen

Übungsblatt 11 (Abgabe spätestens 13.07.2023, 10:00)

---

### Aufgabe 43 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Masse  $m$  des inhomogenen Einheitswürfels  $W = [0, 1]^3$  mit Dichte

$$f(x, y, z) = x^2 z e^{xyz} + y e^{xy},$$

d.h. berechnen Sie  $m = \int_W f \, dV$ .

### Aufgabe 44 (5 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen einer Kugelschale mit Innenradius  $R$  und Dicke  $d$ , d.h. berechnen Sie  $|K| = \int_K dV$  für

$$K := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R \leq |\vec{x}| \leq R + d \}.$$

Bestimmen Sie auch  $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{|K|}{d}$  und interpretieren Sie das Ergebnis.

### Aufgabe 45 (Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumenelement  $dV$  in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$ , definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z : \text{kartesisch}),$$

b) Bestimmen Sie das Volumen des Paraboloids

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 9 - z \\ 0 \leq z \leq 9 \end{array} \right\},$$

und zeichnen Sie  $P$ .

### Aufgabe 46 (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen des Torus<sup>1</sup>

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r \sin u) \cos v \\ (1 + r \sin u) \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < 2\pi \right\},$$

d.h. berechnen Sie  $\int_T dV$ .

---

<sup>1</sup>vgl. Aufgabe 25.

**Aufgabe 47** (Wiederholung: Summen, Reihen, Integrale)<sup>2</sup>  
 Sei (für  $p, \lambda, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ )

(20 Zusatzpunkte)

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Berechnen Sie:

a)  $\sum_{k=0}^n b(k; n, p), \quad \sum_{k=0}^n k b(k; n, p), \quad \sum_{k=0}^n k^2 b(k; n, p),$

b)  $\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \lambda), \quad \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \lambda), \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k; \lambda),$

c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu, \sigma^2}(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mu, \sigma^2}(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\mu, \sigma^2}(x) dx,$

HINWEIS:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$

d)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu_1, \sigma_1^2}(y) f_{\mu_2, \sigma_2^2}(x-y) dy, \quad \text{ERGEBNIS: } f_{\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2}(x).$

**Aufgabe 48**

(14 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 23.07.23 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die *Skills*

- *Basic set notation,*
- *Subsets of sample spaces,*
- *Simple probability,*
- *Probabilities of compound events,*
- *Independent probability,*
- *Dependent probability und*
- *Simple hypothesis testing.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 4 (Blatt 1).

---

<sup>2</sup> Diese Aufgabe wird nicht in den Übungen besprochen. Wir helfen aber gerne bei der Bearbeitung, wenn Sie z.B. Fragen oder Lösungsansätze auf Discord posten.