Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 13 (keine Abgabe)

Aufgabe 53 (keine Abgabe)
Nach dem Verpacken von sechs verschiedenen Geschenken kann Geli den Inhalt nicht mehr erkennen. Eines war für Klaus, zwei für Lothar und drei für Susanne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Verteilung der Geschenke (in der richtigen Anzahl!) alle die richtigen erhalten?

Aufgabe 54 (Simpsons Paradoxon) (keine Abgabe)
Die folgende Tabelle nennt die Zahlen von Bewerber∗innen und davon als Student∗innen Zugelassenen für zwei verschiedene Studiengänge in Berkeley im Jahr 1973.[1]

	männlich		weiblich	
Studiengang	Bewerber	Zugelassene	Bewerberinnen	Zugelassene
I	825	511	108	89
II	373	22	341	24

Wir wählen aus der Menge aller Bewerber∗innen eine Person zufällig aus, wobei jede Person die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, ausgewählt zu werden. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse:
W = Die Person ist weiblich.
$M = W^c$ = Die Person ist männlich.
I = Die Person hat sich für den Studiengang I beworben.
$II = I^c$ = Die Person hat sich für den Studiengang II beworben.
Z = Die Person wurde zum Studium zugelassen.

a) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und interpretieren Sie diese in Worten. (Beispiel: $P(M|Z) = 0{,}8251$ bedeutet: "82,51% der Zugelassenen sind männlich.")
   (i) $P(W)$ und $P(M)$.
   (ii) $P(Z|W)$ und $P(Z|M)$.
   Wer scheint bevorzugt zugelassen zu werden, Männer oder Frauen?
b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und interpretieren Sie diese in Worten.
   (i) $P(Z|W \cap I)$ und $P(Z|M \cap I)$.
   (ii) $P(Z|W \cap II)$ und $P(Z|M \cap II)$.
   Wer scheint bevorzugt zugelassen zu werden, Männer oder Frauen?
c) Berechnen Sie
   (i) $P(Z|I)$ und $P(Z|II)$ sowie
   (ii) $P(I|W)$ und $P(I|M)$,
   und erklären Sie, wie sich der (scheinbare) Widerspruch zwischen (a) und (b) auflösen lässt.

---

[1] P. Bickel, E. A. Hammel, J. W. O'Connel, *Sex bias in graduate admissions: Data from Berkeley*, Science **187** (1975) 398–404.

Aufgabe 55 (keine Abgabe)

Eine Krankheit trete bei 1% der Bevölkerung auf (Prävalenz). Ein Labortest liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität). Derselbe Test liefert bei 95% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität). Wir möchten folgende Frage beantworten:

> *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig ausgewählten, getesteten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?*

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge Ω an.

Bezeichnen Sie mit A_1 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit hat, mit A_2 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit nicht hat (also $A_2 = A_1^C$) und mit B das Ereignis, dass der Test positiv ausfällt.

b) Geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten und alle bedingten Wahrscheinlichkeiten an, die sich unmittelbar aus dem Aufgabentext ergeben.
c) Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe des Satzes von Bayes.
d) Geben Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Test bei einer zufällig ausgewählten Person positiv ausfällt.

Aufgabe 56 (keine Abgabe)

Wir zeigen: Sind die Ereignisse A_j, $j = 1, \dots, n$ paarweise unabhängig, d.h.

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)\, P(A_k) \quad \forall\, j \neq k$$

so folgt daraus **nicht** $P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_j)$.

Beispiel: Ein fairer Würfel werde zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse
A_1 = "der erste Wurf liefert eine gerade Zahl",
A_2 = "der zweite Wurf liefert eine ungerade Zahl" und
A_3 = "die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade".
Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.