Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2023

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Klausur am 01.08.2023

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{6x^3-2x^2-x+1}{x^4-x^2}\,\mathrm{d}x$ Hinweis: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' = 3x^2\,\mathrm{e}^{-y},\ y(2) = 0$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 4y' + 4y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}$.

Aufgabe 4 (10+2+3 = 15 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.
c) Bestimmen Sie $\left(\frac{1}{4}A\right)^{2023}\vec{x}$.

Aufgabe 5 (8 Punkte)
Sei $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y+x \\ y-x \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{K}\,:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ 0 \le t < 1\,.$
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$.

Aufgabe 6 (2+ 8 = 10 Punkte)

Sei $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y - x + xy \\ x - y - 2xy \end{pmatrix}$.

a) Lösen Sie das AWP $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \vec{f}\big(x(t), y(t)\big)\,,\ x(0) = y(0) = 0.$

b) Approximieren Sie die rechte Seite des DGL-Systems aus Teil (a) in der Nähe von $x = y = 0$ linear. Lösen Sie das linearisierte DGL-System mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = (x-y)^4 - (x^2 + y^2) + 6xy\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Hinweis: Es ist hilfreich, $f_x + f_y$ zu betrachten.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh x \, \cos y \\ \sinh x \, \sin y \end{pmatrix}$.

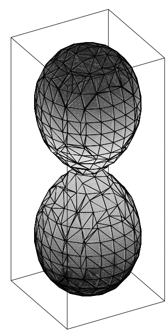
Zeigen Sie, dass f in einer Umgebung von $(x,y) = (0, \frac{\pi}{2})$ eine lokale Umkehrfunktion f^{-1} besitzt, und berechnen Sie ${f^{-1}}'(0,0)$.

Hinweise: $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$, $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$.

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen von

$$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le \cos^2\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{matrix} \right\},$$



d.h. berechnen Sie $|K| = \int_K \mathrm{d}V$.

Aufgabe 10 (9 Punkte)

Sei $\mathcal{F}$ der Teil der Oberfläche einer Kugel mit Radius R im $(-,-,-)$-Oktanten, d.h.

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x \le 0\,,\ y \le 0\,,\ z \le 0 \end{matrix} \right\},$$

und sei $f(\vec{x}) = xyz$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathcal{F}} f \, \mathrm{d}O$.

Hinweis: Kugelkoordinaten bieten sich an.