Algebraische Topologie

Universität Tübingen
Wintersemester 2009/10

Frank Loose

24. Januar 2010

Vorwort

Das vorliegende Skript gibt den Inhalt der Vorlesung „Algebraische Topologie“ wieder, die ich im Wintersemester 2009/10 an der Universität Tübingen halte. Es soll einerseits den Studierenden eine Hilfe sein sich mehr auf die Vorlesung konzentrieren zu können, aber auch mir, damit ich nicht allzuviel an die Tafel schreiben muss. Für Verweise auf Tippfehler oder auch Anregungen inhaltlicher Art bin ich dankbar.

Die fehlenden Diagramme und Abbildungen werden (hoffentlich) zu einem späteren Zeitpunkt hinzu gefügt. Wenigstens wegen dieser hoffe ich, dass es sich weiterhin lohnt in die Vorlesung zu kommen.

Tübingen, im Winter 2009/10

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mengentheoretische Topologie

1.1 Grundlegende Begriffe

Definition 1.1.1 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to [0,\infty)$ heißt eine *Metrik*, wenn d folgende Eigenschaften erfüllt:

(a) Für alle $x, y \in X$ gilt: $d(x,y) = 0$ genau wenn $x = y$ ist;

(b) Für alle $x, y \in X$ gilt: $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie);

(c) Für alle $x, y, z \in X$ gilt: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecks-Ungleichung).

Das Paar (X, d) heißt dann ein *metrischer Raum*.

Beispiel 1.1.2 Sei $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Dann ist $X = \mathbb{R}^n$ mit $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$,

$$d(x,y) = \|y - x\|,$$

ein metrischer Raum (vgl. Aufgabe 1.4.3). $d =: d_{\text{eukl}}$ heißt die *euklidische Metrik* auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ der *euklidische Raum*.

Kommentar 1.1.3 Ist (X, d) ein metrischer Raum und Y eine Teilmenge von X, $Y \subseteq X$, so ist $d_Y := d|Y \times Y$ eine Metrik auf Y. Sie heißt die *induzierte Metrik*.

Beispiel 1.1.4 (a) Jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ wird also mit der Einschränkung der euklidischen Metrik zu einem metrischen Raum.

(b) Für eine beliebige Menge X definiert $d\colon X \times X \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \text{ ist} \\ 1 & \text{falls } x \neq y \text{ ist} \end{cases}$$

eine Metrik. Sie heißt die *diskrete Metrik* auf X.

(c) Sei $X = \{x\colon [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ und $d\colon X \times X \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) = \max\{|y(t) - x(t)| : \ t \in [0, 1]\}.$$

Dann ist d eine Metrik (vgl. Aufgabe 1.4.3).

Definition 1.1.5 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$.

(a) Für $r > 0$ nennen wir

$$B(x_0; r) := \{x \in X : \ d(x, x_0) < r\}$$

die *Kugel* vom Radius r um x_0.

(b) Eine Teilmenge $S \subseteq X$ heißt eine *Umgebung* von x_0, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B(x_0; \varepsilon) \subseteq S$ ist.

Definition 1.1.6 Seien X und Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Sei $x_0 \in X$. Es heißt f *stetig in* x_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$f(B(x_0; \delta)) \subseteq B(f(x_0); \varepsilon);$$

(b) Es heißt f *stetig*, wenn f stetig in jedem Punkt $x \in X$ ist.

Definition 1.1.7 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *offen*, wenn es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass gilt: $B(x; \varepsilon) \subseteq U$.

Kommentar 1.1.8 Sei X ein metrischer Raum. (Die Angabe der Metrik d wird im Folgenden oft unterdrückt.)

(a) Es ist also $U \subseteq X$ genau dann offen, wenn U Umgebung aller ihrer Punkte ist.

(b) Jede Kugel $B(x; r) \subseteq X$ ($x \in X$, $r > 0$) ist offen (vgl. Aufgabe 1.4.4).

(c) Die leere (Teil-) Menge $\emptyset$ ist offen.

(d) $S \subseteq X$ ist Umgebung von $x \in X$ genau wenn es eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt mit $x \in U \subseteq S$.

Bemerkung 1.1.9 *Seien X und Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:*

(a) f ist stetig in x_0, genau wenn für alle Umgebungen $T \subseteq Y$ von $f(x_0)$ gilt: $f^{-1}(T) \subseteq X$ ist eine Umgebung von x_0;

(b) f ist stetig genau wenn für alle offenen Mengen $V \subseteq Y$ gilt: $f^{-1}(V) \subseteq X$ ist offen.

Beweis. (a) Sei $y_0 := f(x_0)$. „$\Rightarrow$“: Sei $T \subseteq Y$ Umgebung von y_0. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(y_0;\varepsilon) \subseteq T$ ist. Weil f stetig in x_0 ist, gibt es daher ein $\delta > 0$, so dass $f(B((x_0;\delta)) \subseteq B(y_0;\varepsilon) \subseteq T$ ist, also $B(x_0;\delta) \subseteq f^{-1}(T)$, d.h.: $f^{-1}(T)$ ist Umgebung von x_0.

„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$. Da $B(y_0;\varepsilon) \subseteq Y$ eine Umgebung von y_0 ist, ist also auch $f^{-1}(B(y_0;\varepsilon))$ eine Umgebung von x_0. Es gibt daher ein $\delta > 0$, so dass $B(x_0;\delta) \subseteq f^{-1}(B(y_0;\varepsilon))$ ist. Es folgt: $f(B(x_0;\delta) \subseteq B(y_0;\varepsilon)$, also f stetig in x_0.

(b) „$\Rightarrow$“: Sei $V \subseteq Y$ offen und $x_0 \in f^{-1}(V)$ beliebig. Weil V damit eine Umgebung von y_0 ist, ist wegen der Stetigkeit von f in x_0 auch $f^{-1}(V)$ Umgebung von x_0. Es gibt damit also ein $\delta > 0$, so dass $B(x_0;\delta) \subseteq f^{-1}(V)$ ist. Das zeigt, dass auch $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist.

„$\Leftarrow$“: Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Weil die Kugel $B(y_0,\varepsilon) \subseteq Y$ offen ist (vgl. Aufgabe 1.4.4), ist damit auch $f^{-1}(B(y_0;\varepsilon)) \subseteq X$ offen. Es existiert damit ein $\delta > 0$, so dass $B(x_0;\delta) \subseteq f^{-1}(B(y_0;\varepsilon))$ ist und damit $f(B(x_0;\delta)) \subseteq B(y_0;\varepsilon)$. Also ist f stetig in x_0. □

Bemerkung 1.1.10 *Sei X ein metrischer Raum. Dann gilt:*

(a) Ist $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie offener Teilmengen in X (wo I eine nicht-leere Indexmenge ist), so ist ihre Vereinigung $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ auch offen.

(b) Sind $U_1,\ldots,U_n \subseteq X$ offen ($n \in \mathbb{N}$), so ist auch ihr Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^n \subseteq X$ offen.

Beweis. (a) Sei $x_0 \in U := \bigcup_\alpha U_\alpha$. Dann gibt es ein $\alpha_0 \in I$, so dass $x_0 \in U_{\alpha_0}$ ist. Da U_{α_0} offen ist, gibt es weiter ein $\epsilon > 0$ mit $B(x_0;\varepsilon) \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq U$. Also ist U offen.

(b) Sei $x_0 \in U := \bigcap_{i=1}^n U_i$. Für alle $i = 1,\ldots,n$ gibt es dann ein $\epsilon_i > 0$ mit $B(x_0;\varepsilon_i) \subseteq U_i$. Setzt man $\varepsilon := \min_{i=1}^n \varepsilon_i > 0$, so folgt: $B(x_0;\varepsilon) \subseteq U$ und damit ist auch U offen. □

Vereinbarung 1.1.11 (a) Wir wollen als Indexmenge für Durchschnitte bzw. Vereinigungen von Teilmengen einer gegebenen Menge X auch die leere Menge $I = \emptyset$ zulassen und setzen dann:

$$\bigcup_{\emptyset} := \emptyset \quad \bigcap_{\emptyset} := X.$$

Da für einen metrischen Raum X die leere (Teil-) Menge $\emptyset$ und die (volle Teil-) Menge X offen sind, gilt dann Bemerkung 1.1.10 auch für den Fall einer leeren Indexmenge.

(b) Im Folgenden bezeichnen wir für eine Menge X mit $\mathcal{P}(X)$ ihre *Potenzmenge*, d.i.: die Menge aller Teilmengen von X.

Definition 1.1.12 Sei X eine Menge. Ein System τ von Teilmengen von X, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, heißt eine *Topologie* auf X, wenn gilt:

(a) Ist I eine (Index-) Menge und $U_\alpha \in \tau$ für alle $\alpha \in I$, so ist auch $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

(b) Ist $n \in \mathbb{N}_0$ und sind $U_i \in \tau$ für $i = 1, \ldots, n$, so ist auch $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Man nennt dann $U \subseteq X$ *offen*, wenn $U \in \tau$ ist. Das Paar (X, τ) heißt ein *topologischer Raum*.

Man beachte, dass wegen unserer Vereinbarung 1.1.11 die leere (Teil-) Menge $\emptyset \subseteq X$ und die volle Teilmenge $X \subseteq X$ stets offen sind.

Kommentar 1.1.13 (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist das System $\tau \in \mathcal{P}(X)$ aller offenen Teilmengen von X eine Topologie auf X (siehe 1.1.10). Sie heißt die *induzierte Topologie* auf X.

(b) Sei X eine beliebige Menge und τ die volle Potenzmenge, $\tau = \mathcal{P}(X)$. Dann ist τ eine Topologie auf X. Sie heißt die *diskrete Topologie* auf X.

(c) Sei X eine beliebige Menge und $\tau = \{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Auch τ ist dann eine Topologie auf X. Sie heißt die *indiskete Topologie* auf X.

Definition 1.1.14 Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(a) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr *Komplement* $\mathcal{C}A := X \setminus A$ offen ist.

(b) Sei $x \in X$. Eine Teilmenge $S \subseteq X$ heißt eine *Umgebung* von x, wenn es eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ gibt mit $x \in U \subseteq S$ (vgl. 1.1.8.(d)).

Kommentar 1.1.15 Man könnte wegen der Rechenregeln für $\mathcal{C}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X auch durch ein System von (abgeschlossenen) Mengen geben, so dass gilt:

(a) Ist $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X, so auch $\bigcap_\alpha A_\alpha$;

(b) sind $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen ($n \in \mathbb{N}_0$), so auch $A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Definition 1.1.16 Seien X und Y topologische Räume (die Angaben der Topologien werden ab nun meistens unterdrückt) und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Sei $x \in X$. Es heißt dann f *stetig in* x, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist.

(b) Es heißt f *stetig*, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

(c) Es heißt f ein *Homöomorphismus*, wenn f stetig ist und es ein stetiges $g\colon Y \to X$ gibt mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

(Mit $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ wird die identische Abbildung auf X bezeichnet.) X und Y heißen *homöomorph*, Bezeichnung: $X \cong Y$, wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

Kommentar 1.1.17 (a) Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn sie stetig ist in $x \in X$, für alle $x \in X$ (siehe Aufgabe 1.4.6).

(b) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $x \in X$. Dann ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ genau dann stetig (in x), wenn sie bzgl. der induzierten Topologien τ_X und τ_Y stetig (in x) ist (vgl. 1.1.9).

Kommentar 1.1.18 (a) Sind $\tau_1, \tau_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ Topologien auf einer Menge X mit $\tau_1 \subseteq \tau_2$, so sagt man, dass τ_1 *gröber* ist als τ_2 (und τ_2 *feiner* als τ_1). (Die diskrete Topologie ist also damit die feinste, die indiskrete die gröbste aller Topologien auf X.) Man beachte, dass $\mathrm{id} : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ zwar bijektiv und stetig ist, aber kein Homöomorphismus, wenn τ_2 *echt feiner* als τ_1 ist.

(b) Sei $(\tau_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine nicht-leere Familie von Topologien auf einer Menge X. Dann ist ihr Durchschnitt $\tau = \bigcap_\alpha \tau_\alpha \subseteq \mathcal{P}(X)$ wieder eine Topologie auf X.

(c) Es gibt damit für jede Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (für eine Menge X) eine *gröbste Topologie* τ auf X, die $\mathcal{A}$ enthält, nämlich

$$\tau = \bigcap \{\sigma \subseteq \mathcal{P}(X) : \ \sigma \text{ ist Topologie und } \sigma \supseteq \mathcal{A}\}.$$

τ heißt die von $\mathcal{A}$ *erzeugte Topologie* und $\mathcal{A}$ ein *Erzeugendensystem* oder eine *Subbasis* von τ.

(d) Expliziter kann man τ so beschreiben: Zunächst bilde man das System $\mathcal{B}$ aller endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{A}$, dann das System aller (beliebigen) Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{B}$.

(e) Es reicht damit z.B. die Stetigkeit einer Abbildung $f\colon X \to Y$ (zwischen topologischen Räumen X und Y) auf einer Subbasis $\mathcal{A}$ der Topologie auf Y zu prüfen (vgl. auch Aufgabe 1.4.9): $f^{-1}(V)$ ist offen, für alle $V \in \mathcal{A}$.

Definition 1.1.19 Sei X ein topologischer Raum.

(a) Sei $x \in X$ und $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ das System aller Umgebungen von x. Mann nennt eine Teilmenge $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ eine *Umgebungsbasis* von x, wenn es für jedes $S \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ gibt, so dass $B \subseteq S$ ist.

(b) Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \tau$ heißt eine *Basis der Topologie*, wenn jede offene Menge Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ ist.

Beispiel 1.1.20 Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie: der *Standard-Topologie* auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Für $x \in X$ ist $\mathcal{B}(x) = \{B(x; \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{N}\}$ eine (abzählbare) Umgebungsbasis von x.

(b) Es ist

$$\mathcal{B} = \{B(q; \frac{1}{m}) : \ q \in \mathbb{Q}^n, \ m \in \mathbb{N}\}$$

eine (abzählbare) Basis der Topologie (vgl. Aufgabe 1.4.14).

Definition 1.1.21 Sei X ein topologischer Raum.

(a) X erfüllt das *1. Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis hat.

(b) X erfüllt das *2. Abzählbarkeitsaxiom* (oder X hat *abzählbare Topologie*), wenn es eine abzählbare Basis gibt.

Definition 1.1.22 Sei X ein topologischer Raum und $a \in X$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X *konvergiert gegen* a, Bezeichnung: $(x_n) \to a$, wenn es für jede Umgebung S von a ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in S$ ist, für alle $n \geq N$.

Bemerkung 1.1.23 *Seien X und Y topologische Räume, X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom und $f\colon X \to Y$ sei eine Abbildung. Es ist f genau dann in $a \in X$ stetig, wenn für jede Folge (x_n) in X, die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))$ gegen $f(a)$ konvergiert.*

Beweis. Sei $b := f(a)$. „$\Rightarrow$“: Sei (x_n) eine Folge in X mit $(x_n) \to a$ und sei weiter $T \in \mathcal{U}(b)$. Dann ist $f^{-1}(T) \in \mathcal{U}(a)$ und damit gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $x_n \in f^{-1}(T)$. Für alle $n \geq N$ ist damit $f(x_n) \in T$, also: $(f(x_n) \to b$. (Diese Richtung benötigt also das 1. Abzählbarkeitsaxiom von X nicht.)

„$\Leftarrow$“: Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von a. Setzen wir rekursiv $\tilde{S}_1 := S_1$ und $\tilde{S}_{n+1} := \tilde{S}_n \cap S_{n+1}$, so erhalten wir eine abzählbare Umgebungsbasis $(\tilde{S}_n)$ von a mit $\tilde{S}_n \subseteq \tilde{S}_m$ für $n \geq m$. Wir können deshalb o.B.d.A. direkt annehmen, dass unsere Umgebungsbasis von vorneherein so ineinander geschachtelt ist (und sparen uns damit die ˜).

Sei nun $T \in \mathcal{U}(b)$. Annahme: $S_n \not\subseteq f^{-1}(T)$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in S_n \setminus f^{-1}(T)$. Es konvergiert dann einerseits (x_n) gegen a, denn ist $S \in \mathcal{U}(a)$ beliebig, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $S_N \subseteq S$. Für alle $n \geq N$ ist dann $x_n \in S_n \subseteq S_N \subseteq S$. Andererseits ist aber $f(x_n) \notin T$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit konvergiert $(f(x_n))$ sicher nicht gegen b. Also muss die Annahme falsch sein und es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $S_n \subseteq f^{-1}(T)$. Also ist $f^{-1}(T) \in \mathcal{U}(a)$ und damit f stetig in a. □

Kommentar 1.1.24 Eine Folge (x_n) in einem topologischen Raum X kann mehrere Grenzwerte haben, wenn die Topologie von X zu grob ist. (In der indiskreten Topologie konvergiert jede Folge gegen jedes Element!)

Definition 1.1.25 Man nennt einen topologischen Raum X *hausdorffsch* (oder *separiert*), wenn er folgendes *Trennumgsaxiom* erfüllt: Sind $x, y \in X$ verschieden, so existieren offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Kommentar 1.1.26 Jeder metrische Raum X hat eine Topologie, die das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (siehe Aufgabe 1.4.14) und separiert ist. (Ist nämlich $x \neq y$, so sei $d := d(x, y)$. Wähle dann $U = B(x; \frac{d}{2})$ und $V = B(y; \frac{d}{2})$.) Hat X eine abzählbare dichte Teilmenge ($Q \subseteq X$ heißt *dicht*, wenn Q jede nicht-leere, offene Teilmenge von X schneidet (vgl. auch Aufgabe 1.4.13)), so hat X auch abzählbare Topologie (vgl. Beispiel 1.1.20.(b) und Aufgabe 1.4.14).

Bemerkung 1.1.27 *Sei X ein topologischer Raum mit 1. Abzählbarkeitsaxiom. Es ist X genau dann hausdorffsch, wenn jede Folge in X höchstens einen Grenzwert hat.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei (x_n) Folge in X mit $(x_n) \to a$ und $b \neq a$. Wähle $U \in \mathcal{U}(a)$ und $V \in \mathcal{U}(b)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Es gibt nun ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U$ ist, für alle $n \geq N$. Dann ist aber $x_n \notin V$, für alle $n \geq N$, also $(x_n) \not\to b$.

„$\Leftarrow$“: Seien $a, b \in X$ mit $a \neq b$. Seien weiter (S_n) und (T_n) abzählbare Umgebungsbasen von a bzw. b. Wir dürfen weiter annehmen, dass $S_n, T_n \subseteq X$ offen sind, sonst gehe man für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu einer offenen Umgebung über, die in S_n bzw. T_n enthalten ist. Schließlich können wir auch noch annehmen, dass $S_n \subseteq S_m$ und $T_n \subseteq T_m$ ist, für $n \geq m$ (vgl. den Beweis von Bemerkung 1.1.23).

Annahme: $S_n \cap T_n \neq \emptyset$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in S_n \cap T_n$. Wie im Beweis von Bemerkung 1.1.23 sieht man dann, dass (x_n) sowohl gegen a als auch gegen b konvergiert. Also ist die Annahme falsch und damit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $S_n \cap T_n = \emptyset$ ist. X ist also hausdorffsch. $\square$.

1.2 Produkt- und Quotiententopologie

Definition 1.2.1 Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Man nennt eine Teilmenge $V \subseteq Y$ *offen (relativ Y)*, wenn es eine (relativ X) offene Teilmenge $U \subseteq X$ gibt, so dass $V = U \cap Y$ ist.

Kommentar 1.2.2 (a) Das System aller (relativ Y) offenen Teilmengen von Y ist eine Topologie auf Y (vgl. Aufgabe 1.4.18). Sie heißt die von X *induzierte Topologie* (oder auch *Relativtopologie* oder *Teilraumtopologie*) auf Y.

(b) Bezeichnet $i\colon Y \to X$ die *Inklusion*, $i(y) = y$, so ist i bzgl. der induzierten Topologie stetig, denn $i^{-1}(U) = U \cap Y$. Die induzierte Topologie ist die gröbste Topologie, für die i stetig ist (vgl. Aufgabe 1.4.18).

(c) Für einen topologischen Raum Z ist eine Abbildung $f\colon Z \to Y$ genau dann stetig, wenn $i \circ f\colon Z \to X$ stetig ist (so genannte *universelle Eigenschaft der induzierten Topologie*), vgl. auch Aufgabe 1.4.18.

(d) Erfüllt X das 1. bzw. 2. Abzählbarkeitsaxiom, so auch Y. Ist X hausdorffsch, so auch Y. (Vgl. Aufgabe 1.4.19.)

Beispiel 1.2.3 Sei $X = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) mit der Standard-Topologie versehen. ($\mathbb{R}^0$ betrachten wir als den *einpunktigen topologischen Raum*.) Zusammen mit der induzierten Topologie nennen wir

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leq 1\}$$

den *n-dimensionalen Ball* ($\mathbb{B}^0 := \mathbb{R}^0$) und

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \|x\| = 1\}$$

die *n-dimensionale Sphäre*.

Definition 1.2.4 Seien X_1 und X_2 topologische Räume und $X = X_1 \times X_2$ ihr cartesisches Produkt. Bezeichne weiter $\pi_i\colon X \to X_i$ die *kanonische Projektion*, d.i.: $\pi(x_1, x_2) = x_i$ für $i = 1, 2$. Dann nennen wir die von

$$\mathcal{A} = \{\pi_i^{-1}(U_i) \subseteq X : \ U_i \subseteq X_i \text{ ist offen}, \ i = 1, 2\}$$

erzeugte Topologie die *Produkttopologie* auf X.

Kommentar 1.2.5 Seien X_1, X_2 topologische Räume, $X = X_1 \times X_2$ und π_i ($i = 1, 2$) die kanonischen Projektionen.

(a) Es ist also die Produkttopologie die gröbste Topologie auf X, bei der die Projektionen π_i $(i = 1, 2)$ stetig sind.

(b) Bezeichnet

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \subseteq X : \ U_i \subseteq X_i \text{ ist offen}, \ i = 1, 2\},$$

so ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Produkttopologie auf X (vgl. Aufgabe 1.4.20).

(c) Sei Y ein weiterer topologischer Raum. Dann ist (bzgl. der Produkttopologie) eine Abbildung $f: Y \to X$ genau dann stetig, wenn $\pi_i \circ f: Y \to X_i$ stetig ist für $i = 1, 2$ (*universelle Eigenschaft der Produkttopologie*), vgl. Aufgabe 1.4.20.

(d) Erfüllen X_1 und X_2 das 1. bzw. 2. Abzählbarkeitsaxiom bzw. sind X_1 und X_2 hausdorffsch, so auch X (vgl. Aufgabe 1.4.21).

Beispiel 1.2.6 (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (wo $\mathbb{R}$ die Standardtopologie trage) stimmt mit der Standardtopologie überein (vgl. Aufgabe 1.4.23).

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man mit

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \ (n\text{-mal})$$

(zusammen mit der Produkttopologie) als den *n-dimensionalen Torus*.

(c) Für einen topologischen Raum X nennt man $\mathcal{Z}(X) := X \times [0, 1]$ (mit $\pi: \mathcal{Z}(X) \to X$) den *Zylinder über* X. (Hierbei trägt $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ die von $\mathbb{R}$ induzierte Topologie und $\mathcal{Z}(X)$ die Produkttopologie.)

Definition 1.2.7 Sei X ein topologischer Raum und $R \subseteq X \times X$ eine *Äquivalenzrelation* auf X. (Wir schreiben $x \sim y$, wenn $(x, y) \in R$ ist.) Bezeichne weiter $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$ eine *Äquivalenzklasse* in X und $X/R = \{[x] \in \mathcal{P}(X) : x \in X\}$ die *Quotientenmenge*. Sei schließlich $\pi: X \to X/R$, $x \mapsto [x]$, die *kanonische Projektion*. Wir nennen nun eine Teilmenge $U \subseteq X/R$ *offen*, wenn $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

Kommentar 1.2.8 (a) Die so definierten offenen Mengen bilden eine Topologie auf X/R (vgl. Aufgabe 1.4.24). Sie heißt die *Quotiententopologie* auf X/R.

(b) Nach Konstruktion ist sie die feinste Topologie auf X/R, für die π stetig ist.

(c) Für einen topologischen Raum Y ist eine Abbildung $f\colon X/R \to Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi\colon X \to Y$ stetig ist (*universelle Eigenschaft*), vgl. Aufgabe 1.4.24.

Beispiel 1.2.9 (a) Sei $I = [0,1]$ und $R \subseteq I \times I$ die von $0 \sim 1$ *erzeugte Äquivalenzrelation* (d.h.: die kleinste, die $(0,1)$ enthält, vgl. Kommentar 1.1.18), also $R = \{(0,1),(1,0),(x,x) : x \in I\}$. Dann ist $I/R \cong \mathbb{S}^1$ vermöge $f\colon I/R \to \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$,

$$f([t]) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = e^{2\pi i t}$$

(vgl. Aufgabe 1.4.25).

(b) Sei $X = I \times I$ und $R \subseteq X \times X$ die von $(0,t) \sim (1,t)$ und $(s,0) \sim (s,1)$ (für alle $s,t \in I$) erzeugte Äquivalenzrelation. Dann ist $f\colon X/R \to \mathbb{T}^2$,

$$f([s,t]) = (e^{2\pi s}, e^{2\pi t})$$

ein Homöomorphismus (vgl. Aufgabe 1.4.25).

(c) Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Seien $x, y \in X$ äquivalent, wenn $x = y$ oder $x, y \in A$ sind. Der resultierende Quotientenraum wird mit X/A bezeichnet. Er entsteht aus X durch Identifikation von A zu einem Punkt.

Definition 1.2.10 Sei X ein topologischer Raum.

(a) Es heißt $\mathcal{C}(X) := \mathcal{Z}(X)/(X \times \{1\})$ der *Kegel über* X mit *Spitze* $S := [X \times \{1\}] \in \mathcal{C}(X)$.

(b) Bezeichne $j\colon X \to \mathcal{C}(X)$, $x \mapsto [x,0]$. Es heißt dann $\mathcal{S}(X) := \mathcal{C}(X)/j(X)$ die *Einhängung von* X.

Beispiel 1.2.11 (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{B}^{n+1}$ vermöge $[x,t] \mapsto (1-t)x$ (vgl. Aufgabe 1.4.26).

(b) Ähnlich sieht man für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (vgl. Aufgabe 1.4.26):

$$\mathcal{S}(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{S}^{n+1}.$$

Beispiel 1.2.12 (a) Sei R die Äquivalenzrelation auf $X = I \times I$, die von $(0,t) \sim (1,t)$ erzeugt wird (für alle $t \in I$). Dann ist $X/R \cong \mathcal{Z}(\mathbb{S}^1)$ (vgl. Aufgabe 1.4.27).

Abbildung 1.1: Zylinder, Kegel und Einhängung

Abbildung 1.2: Zylinder, Möbiusband und Kleinsche Flasche

(b) Sei nun R die von $(0,t) \sim (1,1-t)$ $(t \in I)$ erzeugte Äquivalenzrelation auf $X = I \times I$. Dann nennt man $\mathbb{M} := X/R$ das *Möbiusband*.

(c) Sei schließlich R von $(0,t) \sim (1,t)$ und $(s,0) \sim (1-s,1)$ erzeugt $(s,t \in I)$. Dann heißt $\mathbb{K} := I^2/R$ die *Kleinsche Flasche*.

Definition 1.2.13 Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ als äquivalent, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $y = \lambda x$. Der Quotientenraum

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$$

heißt der *n-dimensionale projektive Raum*.

Kommentar 1.2.14 (a) Für einen Punkt $[x] \in \mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ schreibt man häufig

$$[x] = (x_0 : \cdots : x_n),$$

weil der Repräsentant $x = (x_0, \ldots, x_n)$ bis auf ein multiplikatives Inverses eindeutig ist und damit das Verhältnis von je zwei Komponenten das Gleiche ist. Die Abbildung $j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n$,

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \cdots : x_n)$$

ist eine *Einbettung*, d.h.: $\mathbb{R}^n \to j(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{P}^n$, $x \mapsto j(x)$ ist ein Homöomorphismus (vgl. Aufgabe 1.4.30).

Abbildung 1.3: der projektive Raum

Die Teilmenge

$$H := \{[x] \in \mathbb{P}^n : \; x_0 = 0\}$$

wird als die *unendlich-ferne Hyperebene* bezeichnet (siehe auch Aufgabe 1.4.31).

(b) Identifiziert man auf $\mathbb{S}^n$ *Antipoden*, $x \sim \pm x$, so ist $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{S}^n/\sim$ vermöge $[x] \mapsto [\frac{x}{\|x\|}]$ (vgl. Aufgabe 1.4.32).

Vorbereitung 1.2.15 Seien X_1 und X_2 Mengen. So wie wir das cartesische Produkt (mit seinen Projektionen π_j $(j = 1, 2)$) bilden können (genauer: wir verlangen von unserer unterliegenden Mengenlehre, dass sie diese Bildung aus ihren Grundaxiomen erlaubt), können wir auch die *mengentheoretische Summe* $X = X_1 + X_2$ bilden, die so etwas wie die disjunkte Vereinigung von X_1 und X_2 ist. Da wir aber Vereinigungen und Durchschnitte nur für Teilmengen einer gegeben Menge zulassen, macht es (zumindest für uns) keinen rechten Sinn $X_1 \cup X_2$ zu schreiben. Außerdem möchten wir, dass etwa $\mathbb{R} + \mathbb{R}$ aus zwei disjunten Kopien der reellen Zahlen besteht und nicht etwa aus einer. Die mengentheoretische Summe kommt - ähnlich wie andere mengentheoretische Konstruktionen - mit zwei Abbildungen $\iota_j : X_j \to X$, die injektiv sind $(j = 1, 2)$. X ist dann disjunkte Vereinigung seiner beiden Teilmenge $\iota_1(X_1)$ und $\iota_2(X_2)$,

$$X = \iota_1(X_1) \dot\cup \iota_2(X_2).$$

(Wenn es einmal klar ist, verzichten wir später wieder auf die Bezeichnungen ι_j $(j = 1, 2)$ und fassen X_1 und X_2 (vermöge ι_1 und ι_2) als Teilmengen von $X_1 + X_2$ auf.) Nun möchten wir natürlich im Falle, dass X_1 und X_2 topologische Räume sind, auch auf $X_1 + X_2$ eine (natürliche) Topologie definieren.

Definition 1.2.16 Seien X_1 und X_2 topologische Räume, $X = X_1 + X_2$ ihre (mengentheoretische) Summe und $\iota_j : X_j \to X$ die *natürlichen Inklusion* $(j = 1, 2)$. Wir nennen dann eine Teilmenge $U \subseteq X$ *offen*, wenn $\iota_j^{-1}(U) \subseteq X_j$ offen ist, für $j = 1, 2$.

Kommentar 1.2.17 (a) Die so definierten Mengen bilden eine Topologie auf $X = X_1 + X_2$. Sie heißt die *Summentopologie* und ist die feinste Topologie auf X, so dass $\iota_j : X_j \to X$ stetig ist $(j = 1, 2)$.

(b) Ist Y ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung $f : X_1 + X_2 \to Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \iota_j : X_j \to Y$ stetig ist, für $j = 1, 2$ (*universelle Eigenschaft der Summentopologie*), vgl. Aufgabe 1.4.33.

Beispiel 1.2.18 Seien X und Y topologische Räume, $x \in X$ und $y \in Y$. Identifiziert man x und y in $X + Y$ (genauer $\iota_X(x)$ und $\iota_Y(y)$), so nennt man $(X + Y)/\sim$ die *Einpunktvereinigung* von X und Y und schreibt

$$X \vee Y = X + Y/\sim .$$

(In den meisten Anwendungsfällen hängt (der Homöomorphietyp von) $X \vee Y$ nicht von der Wahl von x und y ab und wird damit in der Bezeichnung nicht erwähnt.) Zum Beispiel ist $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ die *Figur „Acht“*.

1.3 Zusammenhang und Kompaktheit

Definition 1.3.1 Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Sind $U, V \subseteq X$ offen mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$, so muss $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ sein.

Definition 1.3.2 (a) Ein Raum X ist also genau dann zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen von X, die zugleich offen und abgeschlossen sind, die leere Menge $\emptyset$ und die volle Menge X sind.

(b) Ein Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er nicht die *topologische Summe* zweier nicht-leerer Teilmengen $U, V \subseteq X$ ist, $X = U + V$ (vgl. Aufgabe 1.4.37).

Beispiel 1.3.3 Das abgeschlossene Intervall $I = [0, 1]$ ist zusammenhängend. (Beweis: Sei $I = U \dot{\cup} V$ und sei $U \neq \emptyset$. Setze $a := \sup(U)$. Da nun $U \subseteq I$ abgeschlossen und $I \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen sind, ist auch $U \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Es folgt: $a \in U$ (vgl. auch Aufgabe 1.4.10). Da aber $U \subseteq I$ auch offen ist, muss $a = 1$ sein. Wäre nun auch $V \neq \emptyset$, so wäre auch $b := \sup(V) = 1$ (mit dem gleichen Argument), also $U \cap V \neq \emptyset$, Widerspruch!. Also ist $V = \emptyset$ und damit I zusammenhängend.)

Proposition 1.3.4 *Seien X und Y topologische Räume, $f \colon X \to Y$ stetig und X zusammenhängend. Dann ist auch $f(X) \subseteq Y$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei o.B.d.A. f surjektiv, $f(X) = Y$ (sonst ersetze f durch $f' \colon X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$). Sei $Y = V_1 \dot{\cup} V_2$ mit $V_1, V_2 \subseteq Y$ offen. Dann ist $X = f^{-1}(V_1) \dot{\cup} f^{-1}(V_2)$ und auch $f^{-1}(V_i) \subseteq X$ ist wegen der Stetigkeit von f offen ($i = 1, 2$). Also muss $f^{-1}(V_1) = \emptyset$ oder $f^{-1}(V_2) = \emptyset$ sein und damit, wegen der Surjektivität von f, auch $V_1 = \emptyset$ oder $V_2 = \emptyset$. Also ist auch Y zusammenhängend. □

Definition 1.3.5 Sei X ein topologischer Raum.

(a) Ein *Weg* in X ist eine stetige Abbildung $\alpha \colon [0, 1] \to X$. Es heißt $\alpha(0) \in X$ der *Anfang* und $\alpha(1) \in X$ das *Ende* von α.

(a) X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in X$ einen Weg mit Anfang x und Ende y in X gibt.

Beispiel 1.3.6 $X = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht wegzusammenhängend. (Beweis: Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.)

Bemerkung 1.3.7 *Ist ein topologischer Raum X wegzusammenhängend, so ist er auch zusammenhängend.*

Beweis. Sei $X = U \dot{\cup} V$. Annahme: $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$. Wähle dann ein $x \in U$ und ein $y \in V$. Es gibt nun einen Weg $\alpha\colon I = [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$. Damit ist $I = \alpha^{-1}(U) \dot{\cup} \alpha^{-1}(V)$, beide Teilmengen von I sind offen (da α stetig ist) und auch nicht-leer, denn $0 \in \alpha^{-1}(U)$ und $1 \in \alpha^{-1}(V)$. Widerspruch zu 1.3.3! Also muss $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ und damit X zusammenhängend sein. □

Beispiel 1.3.8 Der Teilraum

$$X = \{(t, \sin\frac{1}{t}) :\ t > 0\} \,\dot{\cup}\, \{(0, y) :\ -1 \leq y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend (siehe Aufgabe 1.4.38 und Abbildung 1.4).

Abbildung 1.4: die Sinuskurve der Topologen

Definition 1.3.9 Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Teilmengen hat.

Kommentar 1.3.10 (a) Ein lokal wegzusammenhängender Raum braucht nicht wegzusammenhängend zu sein (Beispiel: $\mathbb{R}^*$).

(b) Ein wegzusammenhängender Raum braucht auch nicht lokal wegzusammenhängend zu sein. Als ein Beispiel betrachten wir den so genannten *Kammraum* (siehe Abbildung 1.5)

$$M = \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \,\dot{\cup} \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\begin{pmatrix} 1/n \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/n \\ 1 \end{pmatrix}} \,\dot{\cup}\, \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

wobei für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $\overline{xy}$ die Strecke $\{(1-t)x+ty \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]\}$ bezeichnet ist. Die Punkte $(0,y) \in X$ (mit $y \in (0,1]$) haben dann keine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Mengen, obwohl der ganze Raum wegzusammenhängend ist (vgl. auch Aufgabe 1.4.39).

Abbildung 1.5: der Kammraum

Proposition 1.3.11 *Sei X ein lokal wegzusammenhängender Raum. Dann ist X wegzusammenhängend, genau wenn er zusammenhängend ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$": Siehe 1.3.7. „$\Leftarrow$": Sei $a \in X$ und $U := U(a)$ die *Wegkomponente* von a, d.h.:

$$U(a) = \{x \in X : \text{ es existiert ein Weg } \alpha \text{ von } a \text{ nach } x\}$$

(also die größte wegzusammenhängende Teilmenge von X, die a enthält). Es ist $U \subseteq X$ offen, denn ist $x \in U$ und $V \in \mathcal{U}(x)$ eine wegzusammenhängende Umgebung, so muss $V \subseteq U$ sein, denn wenn man $y \in V$ mit x verbinden kann, dann auch mit a. Da $x \sim y$, wenn x und y über einen Weg verbindbar sind, sogar eine Äquivalenzrelation auf X ist (vgl. Aufgabe 1.4.41), ist nun für $b \in X$ entweder $U(b) = U(a)$ (falls $b \in U(a)$ ist) oder $U(b) \cap U(a) = \emptyset$ (falls $b \notin U(a)$ ist). Es folgt damit

$$X = U(a) \dot\cup \bigcup_{b \notin U(a)} U(b).$$

Da X zusammenhängend ist, muss nun $U(a) = X$ sein, denn $U(a) \neq \emptyset$ (da $a \in U(a)$ ist) und beide Teilmengen der disjunkten Vereinigung sind offen. Damit ist jeder Punkt also mit a verbindbar und somit X wegzusammenhängend. $\square$

Beispiel 1.3.12 $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}$ für $n \geq 2$. (Beweis: Angenommen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist ein Homöomorphismus. Dann ist auch $f|\mathbb{R}^*\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ ein Homöomorphismus. Aber $\mathbb{R}^*$ ist nicht wegzusammenhängend (siehe Beispiel 1.3.6), $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ (mit $x = f(0)$) aber wohl (vgl. Aufgabe 1.4.43): Widerspruch!)

Definition 1.3.13 Sei X ein topologischer Raum.

(a) Eine Familie von Teilmengen $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ von X heißt eine *offene Überdeckung* von X, falls $U_\alpha \subseteq X$ offen ist, für alle $\alpha \in I$, und $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ ist.

(b) Es heißt X *kompakt*, wenn X hausdorffsch ist und jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Kommentar 1.3.14 (a) Ist X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$ und $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie offener Menge von X mit $Y \subseteq \bigcup_\alpha U_\alpha$, so spricht man auch von einer *offenen Überdeckung von* Y. Es ist ja dann $V_\alpha := U_\alpha \cap Y$ offen in Y und (V_α) eine offene Überdeckung von Y im Sinne von Definition 1.3.13.(a).

(b) Durch Komplementbildung kann man eine äquivalente Beschreibung der kompakten Räume X so bekommen: X ist hausdorffsch und ist $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen in X mit $\bigcap_\alpha A_\alpha = \emptyset$, so gibt es bereits $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$, so dass $\bigcap_{i=1}^n A_{\alpha_i} = \emptyset$ ist.

Proposition 1.3.15 *Seien X und Y Hausdorff-Räume und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann gilt: Ist X kompakt, so auch $f(X)$.*

Beweis. O.B.d.A. sei f surjektiv (vgl. den Beweis von Proposition 1.3.4), $f(X) = Y$. Sei nun $Y = \bigcup_\alpha V_\alpha$ und $V_\alpha \subseteq Y$ offen ($\alpha \in I$). Dann ist $X = \bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$ und deshalb gibt es nun $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$, so dass bereits $X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})$ gilt. Wegen der Surjektivität von f ist damit auch $Y = \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$, also ist Y kompakt. □

Lemma 1.3.16 *(a) Sei X ein kompakter topologischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist auch A kompakt.*

(b) Sei X ein Hausdorffraum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

Beweis. (a) Mit X ist zunächst auch $A \subseteq X$ hausdorffsch (vgl. Aufgabe 1.4.19.(c)). Sei nun $A_\alpha \subseteq A$ abgeschlossen ($\alpha \in I$) und $\bigcap_\alpha A_\alpha = \emptyset$ (vgl. auch Kommentar 1.3.14). Weil nun $A \subseteq X$ abgeschlossen ist, ist auch

$A_\alpha \subseteq X$ abgeschlossen (in X) und deshalb gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$, so dass bereits $\bigcap_{i=1}^n A_{\alpha_i} = \emptyset$ ist. Also ist A kompakt.

(b) Sei $b \in \mathcal{C}(K)$ beliebig. Zu jedem $x \in K$ wählen wir nun offene Umgebungen $U_x \in \mathcal{U}(x)$ und $V_x \in \mathcal{U}(b)$ mit $U_x \cap V_x = \emptyset$. Weil natürlich $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$ ist, gibt es nun $x_1 \ldots, x_n \in K$, so dass bereits $K \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cdots U_{x_n}$ ist. Setze nun $V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$. Dann ist V offen, enthält b und es ist $V \cap K = \emptyset$. Das zeigt, dass $\mathcal{C}(K)$ offen und damit $K \subseteq X$ abgeschlossen ist. □

Kommentar 1.3.17 In einem kompakten topologischen Raum ist also eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.

Proposition 1.3.18 *Sei X ein kompakter Raum, Y ein Hausdorff-Raum und $f\colon X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f bereits ein Homöomorphismus.*

Beweis. Wir zeigen, dass f eine *abgeschlossene Abbildung* ist, d.h.: Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen, so auch $f(A) \subseteq Y$. Wegen der Bijektivität von f ist nämlich dann f auch *offen*, d,h.: mit $U \subseteq X$ ist auch $f(U) \subseteq Y$ offen. Damit ist dann $f^{-1}\colon Y \to X$ stetig, also f ein Homöomorphismus.

Sei also $A \subseteq X$ abgeschlossen. Wegen Lemma 1.3.16.(a) ist damit A kompakt und deshalb $f(A)$ nach Proposition 1.3.15 auch. Nun ist aber mit Lemma 1.3.16.(b) $f(A) \subseteq Y$ auch abgeschlossen und damit die Aussage bewiesen. □

Definition 1.3.19 Sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Ein Punkt $a \in X$ heißt *Häufungspunkt (H.P.)* von (x_n), wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Kommentar 1.3.20 (a) Ein Punkt $a \in X$ ist H.P. von (x_n), genau wenn er im Abschluss aller *Endstücke* von (x_n) liegt. (Für den Abschluss einer Teilmenge siehe Aufgabe 1.4.10 und ein Endstück von (x_n) ist gegeben durch die Teilmenge $M_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.)

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $S \in \mathcal{U}(a)$ beliebig. Dann ist $S \cap M_n \neq \emptyset$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) und damit $a \in \overline{M_n}$ (vgl. Aufgabe 1.4.10). Das zeigt: $a \in \bigcap_n \overline{M_n}$. „$\Leftarrow$“: Sei $S \in \mathcal{U}(a)$ beliebig und $a \in \bigcap_n \overline{M_n}$. Wegen Aufgabe 1.4.10 ist dann $S \cap M_n \neq \emptyset$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit enthält $S \cap M_1$ unendlich viele Folgenglieder. Also ist a ein H.P. von (x_n).

(b) Erfüllt X das 1. Abzählbarkeitsaxiom, so ist $a \in X$ ein H.P. einer Folge (x_n) genau dann, wenn es eine gegen a *konvergente Teilfolge* von (x_n) gibt (vgl. Aufgabe 1.4.47).

Proposition 1.3.21 *Sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Topologie. Dann gilt: X ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei (x_n) eine Folge in X und $M_n \subseteq X$ ihre Endstücke ($n \in \mathbb{N}$). Für endlich viele $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ist $\bigcap_{j=1}^{k} M_{n_j} \neq \emptyset$, also erst recht $\overline{M_{n_1}} \cap \cdots \cap \overline{M_{n_k}} \neq \emptyset$. Da X kompakt ist, folgt: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M_n} \neq \emptyset$. Es gibt also einen H.P. von (x_n) (vgl. Kommentar 1.3.20.(a)).

„$\Leftarrow$“: Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von X (wo I eine beliebige Indexmenge ist) und $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis der Topologie von X. Betrachte nun die Teilmenge

$$J = \{k \in \mathbb{N} : \; \exists \alpha_k \in I : \; S_k \subseteq U_{\alpha_k}\}, \quad J = \{n_1, n_2, \ldots\}$$

($\exists :=$ es existiert). Es ist dann $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{n_k}$, erst recht

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{\alpha_k}.$$

Das zeigt: In einem Raum mit abzählbarer Topologie hat jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung.

Sei deshalb nun o.B.d.A. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ mit $U_n \subseteq X$ offen für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze dann $V_n := U_1 \cup \cdots \cup U_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Annahme: Es gibt keine endliche Teilüberdeckung von (U_n). Dann ist $\mathcal{C}(V_n) \neq \emptyset$ und wir können $x_n \in \mathcal{C}(V_n)$ wählen. Es gibt nun einen H.P. $a \in X$ von (x_n) und dieser muss in einer der offenen Mengen U_m liegen. Sei also $m \in \mathbb{N}$ mit $a \in U_m \subseteq V_m$. Dann ist $V_m \in \mathcal{U}(a)$, aber $x_n \notin V_m$ für $n \geq m$. Also ist a kein H.P. von (x_n): Widerspruch! Es existiert also doch eine endliche Teilüberdeckung und damit ist X kompakt. □

Proposition 1.3.22 *(Tychonoff). Sei I eine abzählbare (oder endliche) Menge und $(X_k)_{k \in I}$ eine Familie von Hausdorffräumen mit abzählbarer Topologie. Dann gilt: Das Produkt $X = \prod X_k$ ist kompakt genau dann, wenn X_k kompakt für jedes $k \in I$ ist.*

Kommentar 1.3.23 Der *Satz von Tychonoff* gilt auch, wenn die Räume keine abzählbare Topologie haben und auch, wenn die Indexmenge I überabzählbar ist (siehe z.B. [5]) Für die Definition der Produkttopologie auf einem Produkt mit unendlich vielen Faktoren vgl. Aufgabe 1.4.22.

Beweis von 1.3.22. Weil jedes X_k hausdorffsch ist und abzählbare Topologie hat, ist dies auch für $X = \prod_k X_k$ so (vgl. Aufgabe 1.4.22).

„$\Rightarrow$“: Ist $\pi_k \colon X \to X_k$ die kanonische Projektion auf den k. Faktor, so ist π_k surjektiv. Ist nun X kompakt, so ist mit Proposition 1.3.15 auch $X_k = \pi_k(X)$ kompakt (für alle $k \in I$).

„$\Leftarrow$“: Wir benutzen die Charakterisierung aus Proposition 1.3.21. Sei deshalb $(x^{(0,n)})_n$ eine beliebige Folge in X. Dann ist $(x_1^{(0,n)})_n$ eine Folge in X_1 und hat daher eine konvergente Teilfolge, die wir mit $(x_1^{(1,n)})_n$ bezeichnen. Weiter hat dann auch die Folge $(x_2^{(1,n)})$ in X_2 eine konvergente Teilfolge $(x_2^{(2,n)})$. Ist I endlich, $I = \{1, \ldots, N\}$, so gelangt man nach N Schritten zu einer Teilfolge $(x^{(N,n)})_n$ von (x_n), deren sämtlichen Komponentenfolgen $(x_k^{(N,n)})_n$ in X_k konvergieren. Aber dann konvergiert auch $(x^{(N,n)})_n$ (vgl. Aufgabe 1.4.48). Ist I abzählbar unendlich, $I = \mathbb{N}$, so argumentiere man genauso für die Diagonalfolge $(x^{(n,n)})_n$. Also ist X tatsächlich kompakt. □

Beispiel 1.3.24 (a) Sei $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Nach dem *Satz von Bolzano-Weierstraß* hat jede Folge in X einen H.P. (in X). Also ist $[a, b]$ kompakt.

(b) Sei $Q = [-R, R]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ (mit $R \geq 0$). Wegen Proposition 1.3.22 ist Q also dann kompakt.

Proposition 1.3.25 *(Heine-Borel). Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Da $\mathbb{R}^n$ hausdorffsch ist, ist K nach Lemma 1.3.16.(b) abgeschlossen. Da $K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(0; n)$ ist, existieren $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, so dass schon $K \subseteq B(0; n_1) \cup \cdots \cup B(0; n_k)$ ist. Mit $r := \max_{j=1}^k (n_j)$ folgt dann: $K \subseteq B(0; r)$. Also ist K auch beschränkt.

„$\Leftarrow$“: Da K beschränkt ist, gibt es zunächst ein $R > 0$ so dass $K \subseteq [-R, R]^n =: Q$ ist. Nun ist Q wie gesehen (vgl. Beispiel 1.3.24) kompakt und damit auch abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Es folgt, dass K auch abgeschlossen in Q ist und damit nach Lemma 1.3.16.(a) auch kompakt. □

Definition 1.3.26 (a) Ein Hausdorffraum X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt x eine kompakte Umgebung besitzt.

(b) Ein Hausdorffraum mit abzählbarer Topologie X heißt eine *n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U hat, die homöomorph zu einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.

Kommentar 1.3.27 (a) Jede Mannigfaltigkeit ist lokal kompakt, denn jede offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt, weil für einen Punkt $x \in V$ sicher $\overline{B(x;r)} \subseteq V$ ist, wenn $r > 0$ klein genug ist, und die abgeschlossene Kugel $\overline{B(x;r)}$ ist sicher kompakt, da sie als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist (vgl. Proposition 1.3.25).

(b) Ist $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\operatorname{grad}(f)(x) \neq 0$ für $x \in X$ mit

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) = 0\},$$

so ist nach dem *impliziten Funktionensatz* X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit (z.B. vermöge der Projektion auf die ersten n Koordinaten in einer offenen Umgebung von $x \in X$, wenn $\partial f / \partial x_{n+1}(x) \neq 0$ ist).

(c) Es ist aber z.B. auch

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 = x^3\}$$

eine (topologische) Mannigfaltigkeit der Dimension 1 (aber keine *(differenzierbare) Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^2$), denn z.B. ist $X \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y$ ein Homöomorphismus (mit Umkehrung $\mathbb{R} \to X$, $t \mapsto (t^{2/3}, t)$).

(d) Dagegen ist z.B.

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 0\}$$

keine Mannigfaltigkeit, allerdings lokal kompakt (vgl. Aufgabe 1.4.50).

Proposition 1.3.28 *(Alexandroff). Sei X ein lokal kompakter Raum. Dann existiert ein kompakter Raum $\tilde{X}$, so dass X zu einem Unterraum von $\tilde{X}$ homöomorph ist, dessen Komplement aus nur einem Punkt besteht. $\tilde{X}$ ist bis auf Homöomorphie dadurch eindeutig bestimmt.*

Beweis. Als Menge ist sicher $\tilde{X} = X + \{\omega\}$ (wo ω den zusätzlichen Punkt von $\tilde{X}$ bezeichnet).

Eindeutigkeit der gesuchten Topologie: Da $\tilde{X}$ hausdorffsch ist, muss $\{\omega\} \subseteq \tilde{X}$ zunächst abgeschlossen sein (vgl. Aufgabe 1.4.51). Damit ist dann $X = \mathcal{C}(\{\omega\})$ offen in $\tilde{X}$. Also muss eine Teilmenge $U \subseteq \tilde{X}$ mit $\omega \notin U$ genau dann offen sein, wenn sie es als Teilmenge von X ist, wenn die Teilraumtopologie von $X \subseteq \tilde{X}$ die gegebene Topologie von X sein soll (und damit X homöomorph zu einer Teilmenge von $\tilde{X}$, die nur einen Punkt von $\tilde{X}$ nicht hat).

Ist andererseits $U \subseteq \tilde{X}$ offen mit $\omega \in U$, so ist $A = \mathcal{C}(U)$ zunächst als Teilmenge von $\tilde{X}$ abgeschlossen, aber da $\tilde{X}$ kompakt ist, dann sogar kompakt (vgl. Lemma 1.3.16.(a)).

Ist umgekehrt $A \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge, so ist sie nach Lemma 1.3.16.(b) auch abgeschlossen in $\tilde{X}$ und damit $U = \mathcal{C}(A)$ offen. Der einzige Kandidat für die gesuchte Topologie ist damit folgender:

$$U \subseteq \tilde{X} \text{ offen} :\Leftrightarrow \begin{cases} U \text{ offen in } X, \text{ falls } \omega \notin U \\ \mathcal{C}(U) \text{ kompakt, falls } \omega \in U \end{cases} .$$

Existenz der gesuchten Topologie: Nun prüfe man nach, das durch diese Definition tatsächlich eine kompakte Topologie auf $\tilde{X}$ gegeben ist (vgl. Aufgabe 1.4.52 und benutze, dass X lokal kompakt ist). □

Kommentar 1.3.29 (a) Wenn X bereits kompakt war, so ist $\{\omega\} \subseteq \tilde{X}$ auch offen und damit trägt $\tilde{X}$ die Summentopologie, $\tilde{X} = X + \{\omega\}$ (als Raum), sonst nicht.

(b) $\tilde{X}$ heißt die *Alexandroff-* oder *Einpunkt-Kompaktifizierung* von X.

Beispiel 1.3.30 Die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ ist (homöomorph zu) $\mathbb{S}^n$ für $n \geq 1$. Man betrachte dazu nämlich die *stereographische Projektion* aus dem Nordpol $N := (0, \ldots, 0, 1)$ heraus, $\pi: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$, d.h.: $\pi(x) = y$, genau wenn $(y, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Schnittpunkt der Geraden durch N und x mit der Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\} \cong \mathbb{R}^n$ ist. Dann prüfe man, dass die Fortsetzung $\tilde{\pi}: \mathbb{S}^n \to \widetilde{\mathbb{R}^n}$ von π, gegeben durch $\tilde{\pi}(N) = \omega$, stetig (und bijektiv) ist (vgl. Aufgabe 1.4.54). Da nun $\mathbb{S}^n$ kompakt ist (vgl. Aufgabe 1.4.44) (und $\widetilde{\mathbb{R}^n}$ hausdorffsch), ist $\tilde{\pi}$ nach Proposition 1.3.18 ein Homöomorphismus.

Definition 1.3.31 Seien X und Y lokal kompakte Räume. Dann heißt eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.

Kommentar 1.3.32 (a) Ist X kompakt, so ist jede stetige Abbildung eigentlich (denn ist $K \subseteq Y$ kompakt, so ist $K \subseteq Y$ abgeschlossen, also $f^{-1}(K) \subseteq X$ abgeschlossen, da f stetig ist; also ist $f^{-1}(K)$ nach Lemma 1.3.16 auch kompakt).

(b) Hat X abzählbare Topologie, so ist ein stetiges $f: X \to Y$ genau dann eigentlich, wenn gilt: Ist (x_n) eine Folge in X ohne Häufungspunkte, so ist auch $(f(x_n))$ in Y ohne Häufungspunkte (vgl. Aufgabe 1.4.53).

Bemerkung 1.3.33 *Seien X und Y lokal kompakte Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann gilt: f ist genau dann eigentlich, wenn die Fortsetzung auf die Einpunktkompaktifizierungen $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \tilde{Y}$, gegeben durch $f(\omega_X) = \omega_Y$, stetig ist.*

Beweis. Die Stetigkeit von $\tilde{f}$ in den Punkten verschieden von ω_X ist klar.

„$\Rightarrow$“: Sei $V \in \mathcal{U}(\omega_Y)$ offen. Dann ist also $\mathcal{C}(V)$ kompakt und damit $\mathcal{C}(f^{-1}(V)) = f^{-1}(\mathcal{C}(V))$ auch. Also ist $f^{-1}(V) \subseteq \tilde{X}$ offen und damit $\tilde{f}$ stetig (auch in ω_X).

„$\Leftarrow$“: Ist $K \subseteq Y$ kompakt, so ist $\mathcal{C}(K)$ offen und eine Umgebung von ω_Y. Also ist auch $\mathcal{C}(f^{-1}(K)) = f^{-1}(\mathcal{C}(K))$ offen und enthält ω_X. Damit ist $f^{-1}(K)$ kompakt und damit f eigentlich. $\square$

1.4 Aufgaben

Aufgaben zu 1.1: Grundlegende Begriffe

1.4.1 Sei V ein reeller Vektorraum. Es heißt $\|\cdot\|\colon V \to [0,\infty)$ *eine Norm auf* V (und $(V, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum*), wenn gilt:

(a) Für alle $v \in V$ gilt: $\|v\| = 0$ genau wenn $v = 0$ ist;

(b) für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt: $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$;

(c) für alle $v, w \in V$ gilt: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Zeigen Sie, dass dann durch $d\colon V \times V \to [0,\infty)$, $d(v,w) = \|w - v\|$, eine Metrik auf V gegeben wird.

1.4.2 Sei V ein reeller Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass durch $\|\cdot\|\colon V \to [0,\infty)$, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ eine Norm auf V gegeben ist. (Hinweis: Ungleichung von Cauchy-Schwarz)

1.4.3 Zeigen Sie nun mit Hilfe der Aufgaben 1.4.1 und 1.4.2, dass die euklidische Metrik (vgl. 1.1.2) und die Metrik aus 1.1.4.(c) tatsächlich Metriken sind.

1.4.4 Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$, $r > 0$ und $U = B(x; r)$ die Kugel vom Radius r um x. Zeigen Sie, dass $U \subseteq X$ offen ist.

1.4.5 Sei X eine Menge. Zeigen Sie: Die von der diskreten Metrik induzierte Topologie auf X ist die diskrete Topologie.

1.4.6 Seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn f stetig ist in x, für alle $x \in X$.

1.4.7 Seien X, Y und Z topologische Räume sowie $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Sei weiter $x \in X$ sowie $y = f(x)$ und $z = g(y)$. Zeigen Sie:

(a) Ist f stetig in x und g stetig in y, so ist die Komposition $g \circ f\colon X \to Y$, $g \circ f(x) = g(f(x))$, stetig in x.

(b) Sind f und g stetig, so auch $g \circ f$.

1.4.8 (a) Sei X eine Menge mit zwei Elementen. Bestimmen Sie alle Topologien auf X. Wieviele davon sind paarweise nicht zueinander homöomorph?

(b) Sei X eine Menge mit drei Elementen. Bestimmen Sie alle Topologien auf X. Wieviele davon sind paarweise nicht zueinander homöomorph?

1.4.9 Seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Sei weiter $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(N)$ eine Subbasis der Topologie auf Y. Zeigen Sie: f ist bereits dann stetig, wenn $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist, für alle $V \in \mathcal{A}$. (Hinweis: Die Menge $\{V \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(V) \subseteq X \text{ ist offen}\}$ ist eine Topologie auf Y.)

1.4.10 Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann nennt man

$$\bar{Y} := \bigcap\{A \subseteq X :\ A \text{ ist abgeschlossen, } A \supseteq Y\}$$

den Abschluss (oder *die abgeschlossene Hülle*) *von* Y. Zeigen Sie:

(a) $\bar{Y}$ ist abgeschlossen und zwar die kleinste abgeschlossene Menge in X, die Y enthält.

(b) Es ist $x \in \bar{Y}$ genau dann, wenn für jede Umgebung S von x gilt: $S \cap Y \neq \emptyset$.

1.4.11 Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann nennt man

$$\operatorname{int}(Y) := \bigcup\{U \subseteq X :\ U \text{ ist offen, } U \subseteq Y\}$$

den offenen Kern (oder *das Innere*) *von* Y. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{int}(Y)$ ist offen und zwar die größte offene Menge, die in Y enthalten ist.

(b) Es ist $x \in \operatorname{int}(Y)$ genau dann, wenn es eine Umgebung S von x gibt mit $S \subseteq Y$.

1.4.12 Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Man nennt dann $x \in X$ *einen Randpunkt von* Y, wenn für jede Umgebung S von x gilt: $S \cap Y \neq \emptyset$ und $S \cap \mathcal{C}Y \neq \emptyset$. Bezeichnet

$$\partial Y := \{x \in X :\ x \text{ ist Randpunkt von } Y\},$$

so zeigen Sie: $\partial Y = \bar{Y} \setminus \operatorname{int}(Y)$.

1.4.13 Sei X ein topologischer Raum. Es heißt dann eine Teilmenge Y *dicht in* X, wenn $\bar{Y} = X$ ist. Zeigen Sie: Es ist $Y \subseteq X$ genau dann dicht in X, wenn für jede nicht-leere, offene Menge $U \subseteq X$ gilt: $U \cap Y \neq \emptyset$.

1.4.14 Sei X ein metrischer Raum (mit der induzierten Topologie).

(a) Zeigen Sie, dass X das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (vgl. Beispiel 1.1.20.(a)).

(b) X besitze eine abzählbare dichte Teilmenge. Zeigen Sie, dass X dann auch das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (vgl. Beispiel 1.1.20.(b)).

1.4.15 (a) Zeigen Sie: Erfüllt ein topologischer Raum das 2. Abzählbarkeitsaxiom, so auch das 1.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines topologischen Raumes an, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, nicht aber das 2.

1.4.16 Sei X eine Menge und seien d_1, d_2 Metriken auf X. Weiterhin gebe es Konstanten $c, C > 0$, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$cd_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Cd_1(x,y).$$

Zeigen Sie, dass die von d_1 und d_2 induzierten Topologien τ_1 und τ_2 auf X übereinstimmen, $\tau_1 = \tau_2$.

Aufgaben zu 1.2: Produkt- und Quotiententopologie

1.4.17 Sei (X, d) ein metrischer Raum, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ die induzierte Topologie auf X und Y eine Teilmenge von X. Zeigen Sie: Ist d_Y die von d induzierte Metrik auf Y, so stimmt die von d_Y induzierte Topologie mit der von τ auf Y induzierten Relativtopologie überein.

1.4.18 Sei X ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X.

(a) Zeigen Sie, dass die relativ Y offenen Teilmengen von Y eine Topologie auf Y bilden.

(b) Zeigen Sie, dass die Inklusion $i: Y \to X$ bzgl. der Relativtopologie stetig ist und die Relativtopologie die gröbste Topologie auf Y ist bzgl. der i stetig ist.

(c) Sei Z ein weiterer topologischer Raum. Zeigen Sie die folgende universelle Eigenschaft der Relativtopologie auf Y: Eine Abbildung $f: Z \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $i \circ f: Z \to X$ stetig ist.

1.4.19 Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, versehen mit der Relativtopologie. Zeigen Sie:

(a) Erfüllt X das 1. Abzählbarkeitsaxiom, so auch Y.

(b) Hat X abzählbare Topologie, so auch Y.

(c) Ist X hausdorffsch, so auch Y.

1.4.20 Seien X_1 und X_2 topologische Räume, $X = X_1 \times X_2$ ihr cartesisches Produkt und $\pi: X \to X_i$ die kanonischen Projektionen ($i = 1, 2$).

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \subseteq X : \; U_i \subseteq X_i \text{ ist offen, } i = 1, 2\}$$

eine Basis der Produkttopologie auf X ist.

(b) Sei Y ein topologischer Raum. Zeigen Sie die universelle Eigenschaft der Produkttopologie: Eine Abbildung $f: Y \to X$ ist genau dann stetig, wenn die Kompositionen $\pi_i \circ f: Y \to X_i$ ($i = 1, 2$) stetig sind.

1.4.21 Seien X_1 und X_2 topologische Räume und $X := X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie versehen. Zeigen Sie:

(a) Erfüllen X_1 und X_2 das 1. Abzählbarkeitsaxiom, so auch X.

(b) Haben X_1 und X_2 abzählbare Topologie, so auch X.

(c) Sind X_1 und X_2 hausdorffsch, so auch X.

1.4.22 Sei I eine beliebige Menge und $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen.

(a) Definieren Sie die Produkttopologie auf $X := \prod_\alpha X_\alpha$ als die gröbste Topologie, die die Projektionen $\pi_\alpha: X \to X_\alpha$ stetig werden lässt, formulieren und zeigen Sie dann eine universelle Eigenschaft.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \;\; := \;\; & \{\prod_\alpha U_\alpha \subseteq X : \; U_\alpha \subseteq X_\alpha \text{ offen für } \alpha \in I, \\ & U_\alpha = X_\alpha \text{ für fast alle } \alpha \in I\} \end{aligned}$$

eine Basis der Topologie ist.

(c) Wie verhält es sich mit der Vererbung der Abzählbarkeitsaxiome, wie mit der Verererbung der Hausdorff-Eigenschaft?

1.4.23 Sei $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie versehen und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt. (Hinweis: Eine Kugel ist Vereinigung von Quadern und ein Quader ist Vereinigung von Kugeln.)

1.4.24 Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi\colon X \to X/{\sim}$ die kanonische Projektion.

(a) Zeigen Sie, dass die offenen Mengen auf $X/{\sim}$ tatsächlich eine Topologie bilden.

(b) Zeigen Sie ihre universelle Eigenschaft: Für einen topologischen Raum Y ist eine Abbildung $f\colon X/{\sim} \to Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi\colon X \to Y$ es ist.

1.4.25 Sei $I = [0,1]$ das *Einheitsintervall*.

(a) Sei $R \subseteq I \times I$ die von $(0,1) \sim (1,0)$ erzeugte Äquivalenzrelation auf I und $f\colon I \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{2\pi t}$. Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $\bar{f}\colon I/R \to \mathbb{S}^1$ mit $\bar{f} \circ \pi = f$ gibt und dass $\bar{f}$ stetig und bijektiv ist. (Vorsicht: Der Buchstabe π ist hier ein wenig überlastet.)

(b) Zeigen Sie nun, dass $\bar{f}$ sogar ein Homöomorphismus ist. (Hinweis: Da $\mathbb{S}^1$ hausdorffsch ist, reicht es nach Proposition 1.3.18 zu zeigen, dass I/R kompakt ist.)

(c) Sei nun $X = I \times I$ und $R \subseteq X \times X$ die von $(s,0) \sim (s,1)$ und $(0,t) \sim (1,t)$ erzeugte Äquivalenzrelation auf X $(s,t \in I)$. Zeigen Sie nun (ähnlich wie unter (a) und (b)), dass die Abbildung $f\colon X \to \mathbb{T}^2$,

$$f(s,t) = (e^{2\pi is}, e^{2\pi it}),$$

einen Homöomorphismus von X/R nach $\mathbb{T}^2$ induziert.

1.4.26 (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{S}^n \times I \to \mathbb{B}^{n+1}$, $(x,t) \mapsto (1-t)x$, einen Homöomorphismus zwischen $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n)$ und $\mathbb{B}^{n+1}$ induziert.

(b) Zeigen Sie in ähnlicher Weise, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\mathcal{S}(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{S}^{n+1}$.

1.4.27 Sei R die Äquivalenzrelation auf $X = I \times I$, die von $(0,t) \sim (1,t)$ erzeugt wird (für alle $t \in I$). Zeigen Sie, dass $X/R \cong \mathcal{Z}(\mathbb{S}^1)$ ist.

1.4.28 Sei X ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge. Sei weiter X/Y der Quotient von X, der Y zu einem Punkt identifiziert. Zeigen Sie: Ist Y in X nicht abgeschlossen, so ist X/Y nicht hausdorffsch, auch wenn X es ist.

1.4.29 Man nennt eine Abbildung zwischen topologischen Räumen *offen*, wenn das Bild jeder offenen Menge wieder offen ist. Nun zeigen Sie: Ist X ein topologischer Raum mit abzählbarer Topologie und $\sim$ eine Äquivalenzrelation derart, dass die kanonische Projektion $\pi\colon X \to X/{\sim}$ offen ist, so hat auch der Quotientenraum $X/{\sim}$ abzählbare Topologie.

1.4.30 Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ der (reell-) projektive Raum so wie $H \subseteq \mathbb{P}^n$ seine unendlich ferne Hyperebene. Zeigen Sie, dass die Abbildung $j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n \setminus H$, $x \mapsto [1, x]$, ein Homöomorphismus ist.

1.4.31 Sei $\mathbb{P}^2$ die projektive Ebene aller Geraden im $\mathbb{R}^3$. Wir bezeichnen $L \subseteq \mathbb{P}^2$ als eine *(projektive) Gerade*, wenn es eine Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$ (durch 0) gibt, so dass L aus all den Geraden in $\mathbb{R}^3$ besteht, die in E liegen. Nun zeigen Sie: Zwei (verschiedene) projektive Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

1.4.32 Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der Sphäre $\mathbb{S}^n$ dadurch, dass wir gegenüberliegende Punkte (so genannte *Antipoden*) miteinander identifizieren: $x \sim y$, genau wenn $x = \pm y$. Ist $Q = \mathbb{S}^n/\sim$ der Quotient, so zeigen Sie, dass die Inklusion $i\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ einen Homöomorphismus von Q nach dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ induziert.

1.4.33 Seien X_1 und X_2 topologische Räume und (X, ι_1, ι_2) ihre mengentheoretische Summe. Zeigen Sie die universelle Eigenschaft der Summentopologie: Ist Y ein topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, so ist f genau dann stetig, wenn $f \circ \iota_j\colon X_j \to Y$ $(j = 1, 2)$ stetig ist.

1.4.34 Sei I eine beliebige Menge und $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen.

(a) Definieren Sie die Summentopologie auf $X := \sum_\alpha X_\alpha$ als die feinste Topologie, die die Inklusionen $\iota_\alpha\colon X_\alpha \to X$ stetig werden lässt, formulieren und zeigen Sie dann eine universelle Eigenschaft.

(b) Wie verhält es sich mit der Vererbung der Abzählbarkeitsaxiome, wie mit der Vererbung der Hausdorff-Eigenschaft?

1.4.35 Sei X eine Menge und für jedes $\alpha \in I$ (einer Indexmenge I) seien $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ Abbildungen in topologische Räume X_α hinein. Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie auf X gibt, so dass gilt: Ist Y ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung $f\colon Y \to X$ genau dann stetig, wenn $\pi_\alpha \circ f\colon Y \to X_\alpha$ stetig ist, für alle $\alpha \in I$. (Es heißt diese Topologie die *Initialtopologie von* $(\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha)_{\alpha \in I}$.)

1.4.36 Sei X eine Menge und für jedes $\alpha \in I$ (einer Indexmenge I) seien $\iota_\alpha \colon X_\alpha \to X$ Abbildungen aus topologischen Räumen X_α heraus. Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie auf X gibt, so dass gilt: Ist Y ein topologischer Raum und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung, so ist f genau dann stetig, wenn $f \circ \iota_\alpha \colon X_\alpha \to Y$ es ist, für alle $\alpha \in I$. (Es heißt diese Topologie die *Finaltopologie von* $(\iota_\alpha \colon X_\alpha \to X)_{\alpha \in I}$.)

Aufgaben zu 1.3: Zusammenhang und Kompaktheit

1.4.37 Zeigen Sie: Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn er nicht homöomorph zu der topologischen Summe zweier nicht-leerer Teilmengen $U, V \subseteq X$ ist.

1.4.38 Zeigen Sie, dass die *Sinuskurve der Topologen* (vgl. Abbildung 1.4)

$$X = \{(t, \sin\frac{1}{t}) : \ t > 0\} \,\dot\cup\, \{(0, y) : \ -1 \leq y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

1.4.39 Zeigen Sie, dass der Kammraum (siehe 1.3.10.(b) und Abbildung 1.5) wegzusammenhängend aber nicht lokal wegzusammenhängend ist.

1.4.40 Seien X und Y topologische Räume und $f \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie: Ist X wegzusammenhängend, so ist auch das Bild $f(X) \subseteq Y$ wegzusammenhängend.

1.4.41 Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass durch folgende Relation eine Äquivalenzrelation auf X gegeben wird: $x \sim y$, wenn es einen Weg von x nach y gibt. (Die Äquivalenzklassen von $\sim$ heißen dann *die Wegkomponenten* von X.)

1.4.42 Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ die gleiche Kardinalität haben. (Hinweis: Nach dem Satz von *Schröder-Bernstein* reicht es eine injektive und eine surjektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ zu finden.)

1.4.43 Sei $n \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie dass $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$ wegzusammenhängend ist.

1.4.44 Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Räume zusammenhängend und kompakt sind: $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{T}^n$ und $\mathbb{P}^n$.

1.4.45 Zeigen Sie, dass folgende vier Räume paarweise nicht homöomorph sein können: $\mathbb{S}^1$, $[0,1]$, $(0,1)$, $(0,1]$.

1.4.46 Zeigen Sie, dass unter allen Hausdorff-Topologien auf einer Menge die kompakten Topologien die gröbsten sind, d.h.: Man kann eine kompakte Topologie nicht mehr vergröbern, ohne die Hausdorff-Eigenschaft zu verlieren.

1.4.47 Sei X ein topologischer Raum mit 1. Abzählbarkeitsaxiom. Zeigen Sie:

(a) Sei (x_n) eine Folge in X. Dann ist $a \in X$ genau dann ein H.P. von (x_n), wenn es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (x_n) gibt, die gegen a konvergiert.

(b) Sei $Y \subseteq X$. Dann ist $a \in \bar{Y}$ genau dann, wenn es eine Folge (x_n) in Y gibt, die gegen a konvergiert.

1.4.48 Sei I eine Indexmenge, X_α topologische Räume ($\alpha \in I$) und $X = \prod_\alpha X_\alpha$ ihr *topologisches Produkt* (vgl. auch Aufgabe 1.4.22). Zeigen Sie: Eine Folge (x^n) in X ist genau dann konvergent, wenn ihre Komponentenfolgen (x^n_α) in X_α konvergieren ($\alpha \in I$).

1.4.49 Sei V ein reeller Vektorraum unendlicher Dimension, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt und V mit der induzierten Topologie versehen (siehe Aufgaben 1.4.1 und 1.4.2). Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel

$$\mathbb{B} = \{v \in V : \ \|v\| \leq 1\} \subseteq V$$

abgeschlossen und beschränkt, nicht aber kompakt ist. (Hinweis: Konstruieren Sie eine Folge (e_n) von Vektoren $e_n \in \mathbb{B}$ der Länge 1, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. Kann diese einen Häufungspunkt besitzen?)

1.4.50 Zeigen Sie, dass folgende Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^2$ keine Mannigfaltigkeit (irgendeiner Dimension) aber lokal kompakt ist:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 0\}.$$

1.4.51 Zeigen Sie, dass in einem Hausdorffraum die einelementigen Teilmengen abgeschlossen sind.

1.4.52 Sei X ein lokal kompakter Raum. Zeigen Sie dass durch

$$U \subseteq \tilde{X} \text{ offen} :\Leftrightarrow \begin{cases} U \text{ offen in } X, \text{ falls } \omega \notin U \\ \mathcal{C}(U) \text{ kompakt, falls } \omega \in U \end{cases}$$

eine Topologie auf $\tilde{X} = X + \{\omega\}$ gegeben ist, die kompakt ist und die Teilraumtopologie auf $X \subseteq \tilde{X}$ die gegebene Topologie von X ist.

1.4.53 Seien X und Y lokal kompakte Räume und X habe abzählbare Topologie. Zeigen Sie, dass eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ genau dann eigentlich ist, wenn für jede Folge (x_n) ohne Häufungspunkte in X auch die Bildfolge $(f(x_n))$ ohne Häufungspunkte in Y ist. („Strebt (x_n) zum Rand von X, so strebt auch $(f(x_n))$ zum Rand von Y.“)

1.4.54 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion aus dem Nordpol N heraus (vgl. Beispiel 1.3.30).

(a) Begründen Sie, warum π bijektiv ist und geben Sie eine explizite Formel für π und π^{-1} an.

(b) Zeigen Sie, dass π eigentlich ist.

(c) Zeigen Sie nun, dass die Fortsetzung $\tilde{\pi}: \mathbb{S}^n \to \widetilde{\mathbb{R}^n}$ von π, gegeben durch $\tilde{\pi}(N) = \omega$, stetig und sogar ein Homöomorphismus ist.

Kapitel 2

Homotopie

2.1 Homotope Abbildungen

Definition 2.1.1 Seien X und Y topologische Räume. Zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ heißen *homotop*, $f \simeq g$, wenn es eine stetige Abbildung $H\colon X \times I \to Y$ gibt mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$, für alle $x \in X$. Man nennt dann H eine *Homotopie von f nach g* und schreibt $H\colon f \simeq g$ oder $f \overset{H}{\simeq} g$.

Kommentar 2.1.2 (a) Man stelle sich $t \in I = [0,1]$ als Zeitparameter vor. Dann wird für jedes $x \in X$ vermöge der Homotopie H der Punkt $f(x) \in Y$ entlang des Weges $\alpha_x\colon I \to Y$, $t \mapsto H(t,x)$, von $f(x)$ nach $g(x)$ bewegt.

(b) Bezeichnet man für jedes $t \in I$ mit $h_t\colon X \to Y$, $h_t(x) = H(t,x)$, so

Abbildung 2.1: homotope Abbildungen

wird auch die Familie $(h_t)_{t\in I}$ als Homotopie von f nach g bezeichnet: $h_0 = f$, $h_1 = g$.

Bemerkung 2.1.3 *Die Homotopierelation $\simeq$ ist auf $\mathcal{C}(X,Y) := \{f: X \to Y$ stetig$\}$ eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. (i) $h_t = f$, für alle $t \in I$, ist eine Homotopie von f nach f. (ii) Ist $f \overset{H}{\simeq} g$, so setze man $G: X \times I \to Y$, $G(x,t) = H(x, 1-t)$. Dann ist $G: g \simeq f$. (iii) Ist $H: f \simeq g$ und $G: g \simeq h$, so ist $f \simeq h$ vermöge

$$F(x,t) := \begin{cases} H(x,2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

□

Kommentar 2.1.4 (a) Die Homotopieklasse einer stetigen Abbildung f: $X \to Y$ wird mit $[f]$ bezeichnet.

(b) Ist $f: X \to Y$ homotop zu einer konstanten Abbildung $c_{y_0}: X \to Y$, $x \mapsto y_0$ für alle $x \in X$, $f \simeq c_{y_0}$, so nennen wir f *nullhomotop*.

Bemerkung 2.1.5 *Die Äquivalenzrelation $\simeq$ verträgt sich mit der Komposition von Abbildungen, d.h.: Sind X, Y und Z topologische Räume, $f, f' \in \mathcal{C}(X,Y)$ mit $f \simeq f'$ und $g, g' \in \mathcal{C}(Y,Z)$ mit $g \simeq g'$, so ist auch $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*

Beweis. Sei $H: f \simeq f'$ und $G: g \simeq g'$. Setze dann $H_1: X \times I \to Z$, $H_1 := g' \circ H$. Dann gilt: $H_1: g' \circ f \simeq g' \circ f'$. Setze weiter $H_2: X \times I \to Z$, $H_2(x,t) = G(f(x),t)$. Dann gilt: $H_2: g \circ f \simeq g' \circ f$. Insgesamt folgt dann

$$g \circ f \simeq g' \circ f \simeq g' \circ f',$$

also mit Bemerkung 2.1.3 $g \circ f \simeq g' \circ f'$. □

Kommentar 2.1.6 (a) Für $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ setzt man daher

$$[g] \cdot [f] := [g \circ f],$$

was wie gesehen wohldefiniert ist.

(b) Ist Y wegzusammenhängend, so sind je zwei konstante Wege c_{y_1}, c_{y_2}: $X \to Y$ $(y_1, y_2 \in Y)$ homotop, $c_{y_1} \simeq c_{y_2}$ (denn ist $\alpha: I \to Y$ ein Weg von y_1 nach y_2, so ist H mit $H(x,t) = \alpha(t)$ eine Homotopie von c_{y_1} nach c_{y_2}). Ihre Klasse wird dann mit $0 := [c_y]$ bezeichnet.

(c) Für wegzusammenhängende X, Y und Z sowie beliebigem W gilt dann nämlich für jedes $f \in \mathcal{C}(X, Y)$:

$$[f] \cdot 0 = [f] \cdot [c_x] = [f \circ c_x] = [c_{f(x)}] = 0$$

und

$$0 \cdot [f] = [c_z] \cdot [f] = [c_z \circ f] = [c_z \colon X \to Z] = 0$$

mit beliebigen $x \in X$ und $z \in Z$.

Definition 2.1.7 Ein topologischer Raum X heißt *zusammenziehbar*, wenn die Identität $\mathrm{id} \colon X \to X$ nullhomotop ist, $\mathrm{id} \simeq c_x$ (für ein $x \in X$).

Beispiel 2.1.8 Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathbb{R}^n$ (und allgemeiner jede *sternförmige* Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$, vgl. Aufgabe 2.4.1) zusammenziehbar vermöge

$$H(x, t) = (1 - t)x,$$

denn damit ist offenbar $H \colon \mathrm{id} \simeq c_0$.

Kommentar 2.1.9 (a) Ein zusammenziehbarer Raum ist notwendig wegzusammenhängend, denn ist $H \colon \mathrm{id} \simeq c_{x_0}$ für ein $x_0 \in X$, so ist für jedes $x \in X$ die Abbildung $\alpha_x \colon I \to X$, $t \mapsto H(x, t)$, ein Weg von x nach x_0.

(b) Man bezeichnet nun

$$[X, Y] := \mathcal{C}(X, Y)/\simeq .$$

Ihre Elemente sind also Homotopieklassen $[f]$ von Abbildungen.

(c) Ist X zusammenziehbar und Y wegzusammenhängend, so ist $[X, Y] = 0$, also einpunktig, denn für jedes $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ist

$$[f] = [f \circ \mathrm{id}_X] = [f] \cdot [\mathrm{id}_X] = [f] \cdot 0 = 0.$$

Ebenso ist für zusammenziehbares Y (und beliebigem X): $[X, Y] = 0$, denn für $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ist

$$[f] = [\mathrm{id}_Y \circ f] = [\mathrm{id}_Y] \cdot [f] = 0 \cdot [f] = 0.$$

Motivation 2.1.10 Bis jetzt haben wir noch kein Beispiel für eine nicht nullhomotope Abbildung f. Um eines zu geben, versuchen wir einen (wegzusammenhängenden) Raum X anzugeben, der nicht zusammenziehbar ist und wählen dann $f = \mathrm{id}_X$. Von der Anschauung her ist vielleicht der einfachste Raum, der nicht zusammenziehbar ist, die *Kreislinie* $\mathbb{S}^1$, denn beim

Zusammenziehen auf einen Punkt müsste man intuitiv die Kreislinie irgendwo aufreißen.

Die Idee, die man nun verfolgt, um dies zu beweisen, ist typisch für die Algebraische Topologie. Man sucht nach einer algebraischen Größe für eine stetige Abbildung $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, die *invariant* unter Homotopie ist und die für die konstante Abbildung c_1 ($1 \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$) und der Identität id verschieden ist. In dem vorliegenden Fall wird diese algebraische Größe einfach eine ganze Zahl sein (ein Element im Ring $\mathbb{Z}$), die gerade angibt, wie oft f „umläuft“, also die *Umlaufzahl von* f.

Vorbereitung 2.1.11 Im Folgenden benutzen wir etwas Funktionentheorie. Genauer gesagt verwenden wir die *komplexe Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und benutzen von ihr ihre Funktionalgleichung, d.i.:

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w),$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und ihre Periodizität, also (unter Benutzung der Funktionalgleichung die gleichwertige Aussage)

$$\exp(z) = 1 \;\Leftrightarrow\; z \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Wir bezeichnen weiter mit

$$\mathrm{ex}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,\; t \mapsto \exp(2\pi i t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$$

die Abbildung, die anschaulich die reelle Gerade $\mathbb{R}$ auf die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ aufwickelt. Schließlich benutzen wir den so genannten Hauptzweig des *komplexen Logarithmus'* $\log\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$, der z.B. durch das Wegintegral

$$\log(z) = \mathrm{int}_{\overline{1z}} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

gegeben ist. (Hier bezeichnet $\mathbb{R}_0^-$ die nicht positiven reellen Zahlen und $\overline{1z}$ wieder die geradlinige Verbindung in $\mathbb{C}$ von 1 nach z, die für die erlaubten z eben den Nullpunkt vermeidet.) Es ist dann für $z = re^{i\alpha}$ ($r > 0$)

$$\log(re^{i\alpha}) = \ln(r) + i\alpha,$$

wenn man das Argument α von z im Bereich $(-\pi, \pi)$ angibt. (ln bezeichnet hier den *reellen Logarithmus*.) Somit ist also (deshalb *Zweig des Logarithmus'*):

$$\exp \circ \log = \mathrm{id}.$$

exp und log sind *holomorphe* Abbildungen, insbesondere also stetig.

Lemma 2.1.12 *Sei $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und*

$$f \circ \mathrm{ex} = f(1)(\mathrm{ex} \circ \varphi).$$

Kommentar 2.1.13 Bis auf den multiplikativen Faktor $f(1) \in \mathbb{S}^1$ (den wir häufig o.B.d.A. als 1 annehmen können) kommutiert also das folgende Diagramm:

Abbildung 2.2: zur Umlaufzahl von f

Beweis von Lemma 2.1.12. (i) Eindeutigkeit: Seien also $\varphi, \psi\colon I \to \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ und

$$f(1)\mathrm{ex} \circ \varphi = f \circ \mathrm{ex} = f(1)\mathrm{ex} \circ \psi.$$

Dann ist

$$\exp(2\pi i(\psi(t) - \varphi(t)) = \frac{\mathrm{ex} \circ \psi}{\mathrm{ex} \circ \varphi}(t) = 1,$$

für alle $t \in I$. Also ist

$$(\psi - \varphi)(t) \in \mathbb{Z},$$

für alle $t \in I$. Weil nun $\psi - \varphi$ stetig ist und $(\psi - \varphi)(0) = 0$, folgt: $(\psi - \varphi)(t) = 0$, für alle $t \in I$, also $\varphi = \psi$.

(ii) Existenz: Wir nehmen o.B.d.A. zunächst an, dass $f(1) = 1$ ist, sonst gehen wir von f zu der Abbildung g mit $g(z) = f(1)^{-1}f(z)$ über. Sei nun $h := f \circ \mathrm{ex}\colon I \to \mathbb{S}^1$. Da I kompakt ist, ist h sogar *gleichmäßig* stetig. Es gibt damit eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ von I $(k \in \mathbb{N})$, so dass

$$|h(t) - h(t_j)| < 2 \quad \text{für } t \in [t_j, t_{j+1}],\ j = 0, \ldots, k-1.$$

Da $h(t), h(t_j) \in \mathbb{S}^1$ ist, folgt, dass $h(t)$ keine Antipode von $h(t_j)$ ist,

$$\frac{h(t)}{h(t_j)} \neq -1.$$

Damit ist $\log(h(t)/h(t_j))$ definiert (und bis auf den Faktor i der *orientierte Winkel* zwischen $h(t_j)$ und $h(t)$ in $(-\pi, \pi)$). Setze nun:

$$\varphi(t) := \frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{h(t_1)}{h(t_0)} + \cdots + \log\frac{h(t_j)}{h(t_{j-1})} + \log\frac{h(t)}{h(t_j)}\right),$$

wenn $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ist. Es ist dann φ stetig (weil log es ist), $\varphi(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
\mathrm{ex} \circ \varphi(t) &= \exp(\log\frac{h(t_1)}{h(t_0)} + \cdots + \log\frac{h(t)}{h(t_j)}) \\
&= \exp(\log\frac{h(t_1)}{h(t_0)}) \cdot \ldots \cdot \exp(\log\frac{h(t)}{h(t_j)}) \\
&= \frac{h(t_1)}{h(t_0)} \cdots \frac{h(t)}{h(t_j)} = h(t) = f \circ \mathrm{ex}(t),
\end{aligned}$$

für alle $t \in I$, denn $h(t_0) = 1$. □

Definition 2.1.14 Sei $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig und $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte stetige Funktion mit $\varphi(0) = 0$ und $f \circ \mathrm{ex} = f(1)\mathrm{ex} \circ \varphi$. Dann nennen wir

$$\deg(f) := \varphi(1)$$

den *Abbildungsgrad von f*.

Kommentar 2.1.15 (a) Wegen

$$\mathrm{ex}(\varphi(1)) = f(1)^{-1} f \circ \mathrm{ex}(1) = f(1)^{-1} f(1) = 1$$

ist $\varphi(1) \in \mathbb{Z}$. Der Abbildungsgrad von f gibt die Windungszahl von f um $z_0 = 0$ (oder $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$) an.

(b) Allgemeiner definiert man für einen *geschlossenen Weg* $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus C$, $C := f(\mathbb{S}^1)$, die *Windungszahl von α bzgl. z* durch

$$n(\alpha; z) := \deg(f_{\alpha,z}),$$

wo $f_{\alpha,z}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ durch

$$f_{\alpha,z}(\zeta) = \frac{f(\zeta) - z}{|f(\zeta) - z|}$$

definiert ist.

Beispiel 2.1.16 (a) Die konstante Abbildung $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f(z) = 1$ für alle z, hat Abbildungsgrad $\deg(f) = 0$, denn

$$f \circ \mathrm{ex} = f(1)\mathrm{ex} \circ \varphi$$

mit $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in I$, insbesondere also $\varphi(1) = 0$.

(b) Die Identität $\mathrm{id}: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ hat Abbildungsgrad $\deg(\mathrm{id}) = 1$, denn

$$\mathrm{id} \circ \mathrm{ex} = \mathrm{id}(1)\mathrm{ex} \circ \varphi$$

mit $\varphi(t) = t$ für alle $t \in I$, also $\varphi(1) = 1$.

(c) Allgemeiner gilt für jedes $n \in \mathbb{Z}$, dass $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f(z) = z^n$, den Abbildungsgrad n hat, denn $f \circ \mathrm{ex} = f(1)\mathrm{ex} \circ \varphi$ mit $\varphi(t) = nt$, für alle $t \in I$ (vgl. Aufgabe 2.4.2).

Proposition 2.1.17 *Seien $f_0, f_1: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ zwei stetige Abbildungen und homotop zueinander. Dann gilt:*

$$\deg(f_0) = \deg(f_1).$$

Beweis. Wir können zunächst wieder annehmen, dass $f_0(1) = f_1(1) = 1$ ist. Ist nämlich $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ beliebig (aber stetig natürlich) und $g: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $g(z) = f(1)^{-1}f(z)$ für alle $z \in \mathbb{S}^1$, so haben f und g den gleichen Abbildungsgrad. Ist nämlich $\varphi: I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = 0$ und

$$f \circ \mathrm{ex} = f(1)\mathrm{ex} \circ \varphi,$$

so ist

$$\begin{aligned} g \circ \mathrm{ex} &= f(1)^{-1} f \circ \mathrm{ex} = f(1)^{-1} f(1)\mathrm{ex} \circ \varphi = \mathrm{ex} \circ \varphi \\ &= g(1)\mathrm{ex} \circ \varphi. \end{aligned}$$

Also ist

$$\deg(g) = \varphi(1) = \deg(f).$$

Sei nun $(f_s)_{s \in I}$ eine Homotopie von f_0 nach f_1. Auch hier dürfen wir annehmen, dass $f_s(1) = 1$ ist, für alle $s \in I$. Wenn nicht, gehen wir zu der Homotopie (g_s) mit $g_s(t) = f_s(1)^{-1} f_s(t)$ für $s, t \in I$ über.

Wir setzen nun $h_s: I \to \mathbb{S}^1$, $h_s := f_s \circ \mathrm{ex}$ und *liften* nun alle h_s „simultan" zu Abbildungen $\varphi_s: I \to \mathbb{R}$ „nach oben", d.h.: $\varphi_s(0) = 0$ und $h_s = \mathrm{ex} \circ \varphi_s$ für alle $s \in I$. Es ist dann $\Phi: I \times I \to \mathbb{R}$, $(t, s) \mapsto \varphi_s(t)$ (als Abbildung in zwei Variablen) stetig, denn weil $(t, s) \mapsto h_s(t)$ stetig und damit gleichmäßig stetig auf dem kompakten $I \times I$ ist, existiert sogar eine Unterteilung $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ von I $(k \in \mathbb{N})$, so dass für alle $s \in I$ und $t \in [t_j, t_{j+1}]$ für $j = 0, \ldots, k-1$ gilt:

$$|h_s(t) - h_s(t_j)| < 2$$

(vgl. Aufgabe 2.4.3). Daher ist wie in Lemma 2.1.12

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{h_s(t_1)}{h_s(t_0)} + \cdots + \log\frac{h_s(t)}{h_s(t_j)}\right),$$

für alle $t \in [t_j, t_{j+1}]$ und $s \in I$ und damit stetig. Damit ist aber nun auch die Abbildung $I \to \mathbb{Z}$,

$$s \mapsto \deg(f_s) = \varphi_s(1),$$

stetig und deshalb konstant. Es folgt wie behauptet:

$$\deg(f_0) = \deg(f_1).$$

□

Korollar 2.1.18 *Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ ist nicht zusammenziehbar.*

Beweis. Die Identität id auf $\mathbb{S}^1$ kann nicht homotop zur konstanten Abbildung c_1 sein (und damit auch nicht zu irgend einer anderen konstanten Abbildung, denn $\mathbb{S}^1$ ist wegzusammenhängend, vgl. Kommentar 2.1.6.(b))), denn

$$\deg(\mathrm{id}) = 1 \neq 0 = \deg(c_1).$$

□

Korollar 2.1.19 *(Retraktionssatz). Es gibt keine stetige Abbildung $r\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$ mit $r|\mathbb{S}^1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$.*

Beweis. Angenommen $r\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$ ist stetig mit $f(z) = z$ für $z \in \mathbb{S}^1$. Dann ist $H\colon \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1$, $H(x,t) = r(tx)$, eine Homotopie von $h_0 = c_{r(0)}$ nach $h_1 = \mathrm{id}$. Also ist $[\mathrm{id}] = 0$: Widerspruch! □

Korollar 2.1.20 *(Brouwer). Ist $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ stetig, so hat f einen Fixpunkt, d.i. ein $x \in \mathbb{B}^2$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Angenommen $f\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ ist stetig und $f(x) \neq x$, für alle $x \in \mathbb{B}^2$. Sei dann für jedes $x \in \mathbb{B}^2$ der Punkt $r(x) \in \mathbb{S}^1$ der Durchschnitt des Strahls

$$L = \{f(x) + t(x - f(x)) \in \mathbb{R}^2 : \ t \geq 0\}$$

mit $\mathbb{S}^1$ (siehe Abbildung 2.3). Dann ist $r\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$ stetig (vgl. Aufgabe 2.4.7) und nach Konstruktion ist $f(z) = z$, für alle $z \in \mathbb{S}^1$: Widerspruch zu Korollar 2.1.19. □

Abbildung 2.3: zum Fixpunktsatz von Brouwer

Satz 2.1.21 *Für $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ gilt sogar:*

$$f_0 \simeq f_1 \Longleftrightarrow \deg(f_0) = \deg(f_1).$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: siehe Proposition 2.1.17. „$\Leftarrow$“: Zunächst einmal können wir wieder annehmen, dass $f_0(1) = f_1(1) = 1$ ist, denn für ein beliebiges stetiges $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ist $g: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $g(z) = f(1)^{-1} f(z)$ für alle z, homotop zu f. Ist nämlich $f(1) = e^{i\alpha}$ mit $\alpha \in [0, 2\pi)$, so ist $H = (h_s)$ mit

$$h_s(z) = e^{-is\alpha} f(z)$$

eine Homotopie von f nach g.

Seien nun also f_0 und f_1 wie oben und mit gleichem Abbildungsgrad. Sind dann $\varphi_k: I \to \mathbb{R}$ die stetigen Abbildungen mit $\varphi_k(0) = 0$ und

$$f_k \circ \mathrm{ex} = \mathrm{ex} \circ \varphi_k \quad \text{für } k = 0, 1,$$

so gilt für

$$(t, s) \mapsto \varphi_s(t) := (1 - s)\varphi_0(t) + s\varphi_1(t)$$

wegen $\varphi_0(1) = \varphi_1(1)$: $\varphi_s(1) = \varphi_0(1) \in \mathbb{Z}$, für alle $s \in I$. Es folgt, dass

$$\mathrm{ex} \circ \varphi_s(1) = 1 = \mathrm{ex} \circ \varphi_s(0)$$

ist, für alle $s \in I$. Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten $I \to \mathbb{S}^1$ (vgl. 1.2.9.(a)) gibt es deshalb genau ein $H: \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1$ mit

$$H(\mathrm{ex}(t), s) = \mathrm{ex} \circ \varphi_s(t)$$

und H ist stetig. Es ist aber $H = (h_s)$ dann offenbar eine Homotopie von f_0 nach f_1, denn

$$H(\mathrm{ex}(t), k) = \mathrm{ex} \circ \varphi_k(t) = f_k(\mathrm{ex}(t))$$

für $k = 0, 1$ und $\mathrm{ex}: I \to \mathbb{S}^1$ ist surjektiv. Also ist tatsächlich $f_0 \simeq f_1$. $\square$

Kommentar 2.1.22 (a) Es ist also in unserem Fall $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ zunächst als Menge bijektiv zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ vermöge $\deg\colon [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \to \mathbb{Z}$,

$$\deg([f]) := \deg(f),$$

welches ja nach dem Satz wohldefiniert und injektiv, aber wegen Beispiel 2.1.16 auch bijektiv, ist.

(b) Aber $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ trägt auch noch zwei natürliche Verknüpfungen: Erstens wissen wir schon aus 2.1.6.(a), dass wir zwei Homotopieklassen komponieren können,

$$[f] \cdot [g] = [f \circ g].$$

Bedenkt man, dass jedes $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ homotop zu der Potenzfunktion $\mathrm{pot}_n\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $\mathrm{pot}_n(z) = z^n$ mit $n = \deg(f)$ ist (vgl. Satz 2.1.21 und Beispiel 2.1.16.(c)), so sieht man unmittelbar, dass

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$$

ist (siehe auch Aufgabe 2.4.5), für alle $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$.

(c) Außerdem ist $\mathbb{S}^1$ auch noch eine Gruppe (unter der komplexen Multiplikation). Deshalb kann man auch noch folgende „Addition“ auf $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ durch

$$[f] + [g] := [f \cdot g]$$

einführen, wo nun $f \cdot g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ die Abbildung $z \mapsto f(z)g(z)$ meint. Ist nämlich $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$, so ist auch $f \cdot g \simeq f' \cdot g'$ und weiterhin gilt

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$$

für alle f, g (siehe Aufgabe 2.4.6). Auf diese Weise wird dann $([\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1], +, \cdot)$ sogar zu einem Ring, der vermöge deg isomorph zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist.

Satz 2.1.23 *(Borsuk-Ulam). Sei $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{S}^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Wir fassen im Folgenden die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ auch als Teilraum der Sphäre $\mathbb{S}^2$ auf, in dem wir sie als *Äquator* einbetten,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 &= \{x = (z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \ |z|^2 + t^2 = 1\}, \\ \mathbb{S}^1 &= \{x = (z,t) \in \mathbb{S}^2 : \ t = 0\}. \end{aligned}$$

Angenommen nun, wir haben ein stetiges $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mit $f(x) \neq f(-x)$, für alle $x \in \mathbb{S}^2$. Dann setzen wir $\tilde{f}\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$,

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

und $g := \tilde{f}|\mathbb{S}^1\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Es ist dann g nullhomotop, denn $G\colon \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1$,

$$G(z,t) = \tilde{f}(tz, \sqrt{1-t^2})$$

ist eine Homotopie von $c_{\tilde{f}(0,1)}$ nach g (vgl. Abbildung 2.4).

Abbildung 2.4: zum Satz von Borsuk-Ulam

Es folgt, dass der Abbildungsgrad von g gleich Null ist. Sei andererseits $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion mit $\varphi(0) = 0$ und

$$g \circ \mathrm{ex} = g(1)\mathrm{ex} \circ \varphi.$$

Nach Konstruktion von g haben wir außerdem, dass $g(z) = g(-z)$ ist, für alle $z \in \mathbb{S}^1$. Es folgt damit

$$\begin{aligned} g(1)\mathrm{ex} \circ \varphi(t + \frac{1}{2}) &= g \circ \mathrm{ex}(t + \frac{1}{2}) = g(\mathrm{ex}(t)\mathrm{ex}(\frac{1}{2}) \\ &= g(-\mathrm{ex}(t)) = -g(\mathrm{ex}(t)) = -g(1)\mathrm{ex} \circ \varphi(t) \\ &= g(1)\mathrm{ex}(\varphi(t) + \frac{1}{2}), \end{aligned}$$

also

$$\mathrm{ex}(\varphi(t + \frac{1}{2}) - \varphi(t) - \frac{1}{2}) = 1,$$

d.i.

$$\varphi(t + \frac{1}{2}) - \varphi(t) - \frac{1}{2} =: k \in \mathbb{Z},$$

für alle $t \in [0, \frac{1}{2}]$, unabhängig von t, da stetig und ganzzahlig. Insbesondere erhalten wir

$$\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi(0) + \frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} + k$$

und

$$\deg(g) = \varphi(1) = \varphi(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + k = 2k + 1 \neq 0,$$

weil ungerade. Widerspruch! Also gibt es ein solch stetiges $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht. $\square$.

Definition 2.1.24 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum.

(a) Es heißt A ein *Retrakt von* X, wenn es eine stetige Abbildung $r\colon X \to A$ mit $r|A = \mathrm{id}_A$ gibt. Man nennt dann r eine *Retraktion* von X nach A.

(b) Sei $i\colon A \to X$ die Inklusion. Es heißt A ein *Deformationsretrakt* von X, wenn es eine Retraktion $r\colon X \to A$ gibt, so dass $i \circ r\colon X \to X$ homotop zur Identität auf X ist, $i \circ r \simeq id_X$.

Kommentar 2.1.25 (a) Ein Retrakt braucht kein Deformationsretrakt zu sein. Z.B. ist eine einpunktige Teilmenge $A = \{x_0\} \subseteq X$ stets ein Retrakt, aber A ist nur dann Deformationsretrakt, wenn X zusammenziehbar ist.

(b) Ist $i\colon A \to X$ wieder die Inklusion, so ist eine Retraktion $r\colon X \to A$ gerade ein Linksinverses von i, $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Für eine *Deformationsretraktion* r gilt zudem, dass r auch ein Rechtsinverses von i ist, wenn man von Abbildungen zu Abbildungsklassen übergeht:

$$[i][r] = [i \circ r] = [\mathrm{id}_X].$$

Beispiel 2.1.26 $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist ein Deformationsretrakt vermöge $r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$, $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ und der Homotopie $H = (h_t)$ mit

$$h_t(x) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$$

(vgl. Abbildung 2.5). Allerdings ist $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{B}^2$ kein Retrakt, wie wir in Korollar 2.1.19 gesehen haben.

Definition 2.1.27 Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent* oder *vom gleichen Homotopietyp*, wenn es stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt mit

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y.$$

Wir schreiben dann: $X \simeq Y$.

Abbildung 2.5: der Deformationsretrakt $\mathbb{S}^{n-1}$

Kommentar 2.1.28 (a) Ein Deformationsretrakt $A \subseteq X$ ist offenbar vom gleichen Homotopietyp wie X, $A \simeq X$, vermöge der Inklusion $i\colon A \to X$ und einer Deformationsretraktion $r\colon X \to A$.

(b) Ein topologischer Raum ist genau dann zusammenziehbar, wenn er den Homotopietyp des *einpunktigen Raumes* pt hat (vgl. Aufgabe 2.4.9), $X \simeq \mathrm{pt}$.

(c) Ein Teilraum $A \subseteq X$, der homotopieäquivalent zu X ist, $A \simeq X$, braucht aber kein Deformationsretrakt, nicht mal ein Retrakt von X, zu sein. Z.B. gilt für $X = I^2$ und $A \subseteq X$ dem Kammraum (vgl. 1.3.10 und Abbildung 1.5), dass beide zusammenziehbar sind, $A \simeq \mathrm{pt} \simeq X$ (und die Homotopieäquivalenz ist transitiv). Es gibt aber keine Retraktion von X auf A (siehe Aufgabe 2.4.10).

Beispiel 2.1.29 Sei $\mathbb{T}^2$ der 2-dimensionale Torus und $p \in \mathbb{T}^2$. Dann hat $\mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$ den Homotopietyp von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, der Figur Acht (siehe Abbildung 2.6 und Aufgabe 2.4.11).

Definition 2.1.30 Sei $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$ und E_{4g} das reguläre $4g$-Eck mit den Ecken $\omega_k = \exp(2\pi i \frac{k}{4g})$, $k = 0, \dots, 4g-1$. Sei weiter R auf E_{4g} die Äquivalenzrelation, die von

$$\begin{aligned} a_{j+1}: &\quad (1-t)\omega_{4j} + t\omega_{4j+1} \sim t\omega_{4j+2} + (1-t)\omega_{4j+3} \\ b_{j+1}: &\quad (1-t)\omega_{4j+1} + t\omega_{4j+2} \sim t\omega_{4j+3} + (1-t)\omega_{4j+4}, \end{aligned}$$

$t \in [0,1]$, $j = 0, \dots, g-1$, auf dem Rand ∂E_{4g} erzeugt wird.

Dann nennen wir

$$\mathbb{F}_g := E_{4g}/\!\sim$$

Abbildung 2.6: der gelochte Torus

Abbildung 2.7: die geschlossene Fläche vom Geschlecht g

die *geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht g*. Mit $\mathbb{F}_0 := \mathbb{S}^2$ und $\mathbb{F}_1 := \mathbb{T}^2$ bezeichnen wir die geschlossenen, orientierten Flächen vom Geschlecht $g = 0$ und $g = 1$ (siehe 2.7).

Kommentar 2.1.31 Die geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht g ist homöomorph zu einer *Brezelfläche mit g Löchern* bzw. zu einer *Sphäre mit g Henkeln*, wie der folgende „Bilderbeweis" zeigt (siehe Abbildung 2.8):

Abbildung 2.8: die Brezelfläche

Abbildung 2.9: die Sphäre mit g Henkeln

Bemerkung 2.1.32 *Sei $g \in \mathbb{N}$. Dann ist die gelochte Fläche vom Geschlecht g homotopieäquivalent zu einem Bukett von $2g$ Kreislinien,*

$$\mathbb{F}_g \setminus \{p\} \simeq \mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1 \quad (2g\text{-}mal).$$

(Hierbei sollen $2g$ Punkte (aus jedem Summand $\mathbb{S}^1$ einer) zu einem Punkt identifiziert werden.)

Beweis. Sei $\pi\colon E_{4g} \to \mathbb{F}_g$ die kanonische Projektion und o.E. $p = \pi(0)$ (siehe auch Aufgabe 2.4.12). Sei weiter $A = \partial E_{4g}$ (relativ $\mathbb{R}^2$). Dann ist $A \subseteq E_{4g} \setminus \{0\}$ ein Deformationsretrakt (vgl. Abbildung 2.10) und damit auch

$$\mathbb{F}_g \setminus \{p\} = \pi(E_{4g} \setminus \{0\}) \simeq \pi(A) = \mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1.$$

$\square$

Abbildung 2.10: die gelochte Brezelfläche

2.2 Die Fundamentalgruppe

Definition 2.2.1 Sei X ein topologischer Raum und $p \in X$.

(a) Ein Weg $\alpha\colon I \to X$ heißt *geschlossen* (mit *Aufpunkt* p), wenn $\alpha(0) = \alpha(1)$ $(= p)$ ist.

(b) Zwei geschlossene Wege $\alpha, \beta\colon I \to X$ mit Aufpunkt p heißen *homotop (relativ* $\{0, 1\}$*)*, wenn es eine Homotopie $H = (h_s)$ von α nach β gibt, die den Aufpunkt festlässt, $h_s(0) = h_s(1) = p$ für alle $s \in [0, 1]$.

Abbildung 2.11: homotope Wege

Kommentar 2.2.2 (a) Weil $I = [0, 1]$ zusammenziehbar ist, ist jeder Weg $\alpha\colon I \to X$ nullhomotop (im Sinne von Definition 2.1.1). Es wird jedoch verlangt, dass die Homotopie (h_s) den Aufpunkt respektiert.

(b) Ist $A \subseteq X$ und $f, g\colon X \to Y$ stetig mit $f|A = g|A$, so sagt man, dass f und g *homotop relativ* A sind, wenn es eine Homotopie $H\colon X \times I \to Y$ von f nach g gibt, die $H(x, t) = f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$ und $t \in I$ erfüllt.

(c) Wie in Bemerkung 2.1.3 sieht man, dass die Homotopie (rel. $\{0, 1\}$) auf den geschlossenen Wegen mit Aufpunkt $p \in X$ eine Äquivalenzrelation bildet. Ihre Äquivalenzklassen werden mit $[\alpha]$ und die Menge aller mit $\pi_1(X, p)$ bezeichnet.

Definition 2.2.3 Auf

$$\mathcal{C}(p) := \{\alpha\colon I \to X \text{ Weg} :\ \alpha(0) = \alpha(1) = p\}$$

definiert man eine Verknüpfung $*$ durch das Aneinanderfügen von Wegen, $\alpha * \beta: I \to X$,

$$\alpha * \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

für $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(p)$.

Kommentar 2.2.4 (a) Ist (α_s) eine Homotopie zwischen α_0 und α_1 und (β_s) eine Homotopie zwischen β_0 und β_1, so ist $(\alpha_s * \beta_s)$ eine Homotopie zwischen $\alpha_0 * \alpha_1$ und $\beta_0 * \beta_1$. Daher ist das Produkt

$$\begin{aligned} \pi_1(X,p) \times \pi_1(X,p) &\to \pi_1(X,p) \\ ([\alpha],[\beta]) &\mapsto [\alpha][\beta] := [\alpha * \beta] \end{aligned}$$

wohldefiniert.

(b) Auf der Ebene von $\mathcal{C}(p)$ ist die Verknüpfung $*$ nicht assoziativ, denn $(\alpha * \beta) * \gamma$ und $\alpha * (\beta * \gamma)$ haben zwar das gleiche Bild in X, sind aber i.A. verschieden parametrisiert.

(c) Mit $c_p: I \to X$, $c_p(t) = p$ für alle $t \in I$, bezeichnen wir den auf p *konstanten Weg*. Auch $c_p * \alpha$ und $\alpha * c_p$ haben das gleiche Bild wie α, sind aber i.A. verschieden parametrisiert, $\alpha \neq \alpha * c_p \neq c_p * \alpha \neq \alpha$.

(d) Schließlich bezeichnen wir für $\alpha \in \mathcal{C}(p)$ mit $\alpha^{-1}: I \to X$ den rückwärts durchlaufenen Weg,

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t),$$

als den zu α *inversen Weg*.

Lemma 2.2.5 *Sei $\alpha \in \mathcal{C}(p)$ und $\varphi: I \to I$ stetig mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Dann sind α und $\alpha \circ \varphi$ homotop.*

Beweis. Definiere

$$\alpha_s(t) := \alpha((1-s)t + s\varphi(t)).$$

Dann ist $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha \circ \varphi$ und

$$\alpha_s(0) = \alpha_s(1) = \alpha(0) = \alpha(1) = p.$$

Also ist (α_s) eine Homotopie von α nach $\alpha \circ \varphi$ (mit festem Aufpunkt). □

Proposition 2.2.6 *Sei X ein topologischer Raum, $p \in X$ und $\mathcal{C}(p)$ die Menge aller geschlossenen Wege mit Aufpunkt p in X. Dann gilt:*

(a) Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}(p)$*:*

$$([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma]);$$

(b) für alle $\alpha \in \mathcal{C}(p)$*:*

$$[\alpha][c_p] = [c_p][\alpha] = [\alpha];$$

(c) für alle $\alpha \in \mathcal{C}(p)$*:*

$$[\alpha][\alpha^{-1}] = [\alpha^{-1}][\alpha] = [c_p].$$

Kommentar 2.2.7 Es wird also $\pi_1(X, p) = \mathcal{C}(p)/\simeq$ mit dem von $*$ induzierten Produkt eine Gruppe mit Einselement $[c_p]$. Sie heißt die *Fundamentalgruppe* von X zum Basispunkt p.

Beweis von 2.2.6: (a) Setze $\varphi\colon I \to I$,

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 2\tau, & 0 \le \tau \le \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \tau, & \frac{1}{4} \le \tau \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau, & \frac{1}{2} \le \tau \le 1 \end{cases} .$$

Dann ist

$$(\alpha * \beta) * \gamma = (\alpha * (\beta * \gamma)) \circ \varphi$$

(vgl. Aufgabe 2.4.13), also nach Lemma 2.2.5:

$$([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma]).$$

Abbildung 2.12: zum Beweis von 2.2.6.(a)

(b) Setze hier $\varphi\colon I \to I$,

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 2\tau, & 0 \le \tau \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le \tau \le 1 \end{cases} .$$

Dann ist

$$\alpha \circ \varphi = \alpha * c_p$$

(vgl. Aufgabe 2.4.13) und damit

$$[\alpha] = [\alpha][c_p].$$

Ähnlich sieht man, dass auch $[\alpha] = [\alpha][c_p]$ ist.

Abbildung 2.13: zum Beweis von 2.2.6.(b)

(c) Setze hier

$$h_s(t) = \begin{cases} \alpha(2st), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2s(1-t)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Dann ist $(h_s)\colon c_p \simeq \alpha * \alpha^{-1}$ und Anwendung auf α^{-1} liefert wegen $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ auch: $c_p \simeq \alpha^{-1} * \alpha$. $\square$

Bemerkung 2.2.8 *Sind p, q Punkte eines topologischen Raumes X und ist $\gamma\colon I \to X$ ein Weg von p nach q, so ist mit $\gamma^{-1}\colon I \to X$, $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$,*

$$\Phi\colon \pi_1(X, q) \to \pi_1(X, p),\ [\beta] \mapsto [\gamma * \beta * \gamma^{-1}]$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Ist $\beta_0 \simeq \beta_1$ vermöge einer Homotopie (β_s), so ist $(\gamma * \beta_s * \gamma^{-1})$ eine Homotopie zwischen $\gamma * \beta_0 * \gamma^{-1}$ und $\gamma * \beta_1 * \gamma^{-1}$. Also ist Φ wohldefiniert.

Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(q)$ ist nun:

$$\begin{aligned} [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}][\gamma * \beta * \gamma^{-1}] &= [\gamma * \alpha * (\gamma * \gamma^{-1}) * \beta * \gamma^{-1}] \\ &= [\gamma * (\alpha * \beta) * \gamma^{-1}], \end{aligned}$$

Abbildung 2.14: Unabhängigkeit vom Aufpunkt

wobei man für die letzten beiden Gleichungen ähnlich argumentiert wie im Beweis von Proposition 2.2.6. Es ist also für alle $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, q)$

$$\Phi([\alpha][\beta]) = \Phi([\alpha])\Phi([\beta])$$

und damit Φ wenigstens schon mal ein Homomorphismus. Das Gleiche gilt natürlich dann auch für $\Psi\colon \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q)$,

$$\Psi([\alpha]) = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma],$$

und wegen $\gamma * \gamma^{-1} \simeq c_q$ (und $\gamma^{-1} * \gamma \simeq c_p$) ist Ψ Inverses zu Φ,

$$\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}, \quad \Psi \circ \Phi = \mathrm{id}.$$

Also ist Φ sogar ein Isomorphismus. □

Kommentar 2.2.9 (a) Ist X wegzusammenhängend, so schreiben wir aus diesem Grund auch einfach $\pi_1(X)$, wenn es nur auf den Isomorphietyp der Fundamentalgruppe ankommt und der Basispunkt keine Rolle spielt. (Genau genommen meinen wir dann die Isomorphieklasse von $\pi_1(X, p)$, $\pi_1(X) := [\pi_1(X, p)]$.)

(b) Ein wegzusammenhängender Raum X, wo jeder geschlossene Weg (mit Aufpunkt $p \in X$) nullhomotop ist, heißt *einfach zusammenhängend*,

$$\pi_1(X) = (1).$$

(c) $\mathbb{R}^n$ (für $n \in \mathbb{N}_0$) (und allgemeiner jede sternförmige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$) ist einfach zusammenhängend, denn zu $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$ ist (α_s) mit $\alpha_s(t) = s\alpha(t)$ eine Homotopie von c_0 nach α,

$$\pi_1(\mathbb{R}^n) = (1).$$

(d) Die Fundamentalgruppe eines (wegzusammenhängenden) Raumes X ist i.A. nicht abelsch. Z.B. werden wir später sehen (siehe Beispiel 2.2.44), dass für die obere Schlaufe α und die untere Schlaufe β der Figur Acht das Produkt $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$ nicht nullhomotop ist.

Abbildung 2.15: die Figur Acht

Bemerkung 2.2.10

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Beweis. Jeder geschlossene Weg $\alpha\colon I \to X$ in einem topologischen Raum X induziert eine stetige Abbildung $\bar{\alpha}\colon \mathbb{S}^1 \to X$ mit $\bar{\alpha} \circ \mathrm{ex} = \alpha$, denn $\alpha(0) = \alpha(1)$ und $\mathrm{ex}\colon I \to \mathbb{S}^1$ identifiziert ja gerade 0 mit 1. Wir wollen im Folgenden in der Notation zwischen α und $\bar{\alpha}$ nicht unterscheiden und fassen einen geschlossenen Weg α wahlweise als eine Abbildung von I bzw. $\mathbb{S}^1$ auf. Ist etwa $X = \mathbb{S}^1$, und α geschlossen mit Aufpunkt $1 \in \mathbb{S}^1$, so können wir den Abbildungsgrad $\deg(\alpha)$ betrachten, wenn wir α als eine Abbildung von $\mathbb{S}^1$ nach $\mathbb{S}^1$ betrachten.

Wir behaupten nun, dass $\Phi\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$, $[\alpha] \mapsto \deg(\alpha)$, wohldefiniert und ein Homomorphismus ist. Die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 2.1.17 und die Homomorphie folgendermaßen: Sind $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(1)$ beliebig und $\varphi, \psi\colon I \to \mathbb{R}$ die stetigen Abbildungen mit $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ und

$$\alpha \circ \mathrm{ex} = \mathrm{ex} \circ \varphi, \quad \beta \circ \mathrm{ex} = \mathrm{ex} \circ \psi,$$

so ist

$$(\alpha * \beta) \circ \mathrm{ex} = \mathrm{ex} \circ \chi$$

und $\chi(0) = 0$ für

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(1) + \psi(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

also

$$\begin{aligned}\Phi([\alpha][\beta]) &= \chi(1) = \varphi(1) + \psi(1)\\ &= \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta]).\end{aligned}$$

Ist $\deg(\alpha) = 0$, so zeigt Satz 2.1.21, dass $\alpha \simeq c_1$ (sogar relativ $\{1\} \subseteq \mathbb{S}^1$) ist, also $[\alpha] = 1$ und damit Φ injektiv. Da für jedes $n \in \mathbb{Z}$ auch $\Phi([\alpha]) = n$ ist, wenn man $\alpha(t) = \mathrm{ex}(nt)$ (jetzt wieder als Abbildung von I nach $\mathbb{S}^1$) setzt, ist Φ auch surjektiv. Also ist Φ ein Isomorphismus. □

Kommentar 2.2.11 (a) Bis hier haben wir jedem *punktierten topologischen Raum* (X,p) eine Gruppe $\pi_1(X,p)$ zugeordnet. Nun ordnen wir auch jeder stetigen Abbildung zwischen punktierten topologischen Räumen $f\colon (X,p) \to (Y,q)$, d.h. $f(p) = q$, einen Homomorphismus

$$\pi_1(f) = f_*\colon \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,q)$$

wie folgt zu: $[\alpha] \mapsto [f\circ\alpha]$. Das ist tatsächlich zunächst mal wohldefniert, denn ist $H\colon \alpha \simeq \beta$, so ist $f \circ H\colon f\circ\alpha \simeq f\circ\beta$. Dann ist f_* aber auch ein Gruppenhomomorphismus, denn aus $f\circ(\alpha * \beta) = (f\circ\alpha) * (f\circ\beta)$ folgt:

$$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha])f_*([\beta]).$$

$f_* = \pi_1(f)$ heißt der von f *induzierte Gruppenhomomorphismus*.

(b) Wir wollen nun diese Zuordnung zwischen einer Theorie (hier der topologischen Räume) in eine andere Theorie (hier der Gruppen) etwas systematischer fassen, weil wir weitere Beispiele ähnlicher Art noch häufiger antreffen werden.

Definition 2.2.12 Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden drei Daten:

(a) Einer Klasse von *Objekten* $X, Y, Z, \ldots$;

(b) für je zwei Objekte X, Y einer Menge von *Morphismen* $\mathrm{Mor}(X,Y) = \{f, g, h, \ldots\}$;

(c) für je drei Objekte X, Y, Z aus einer Abbildung

$$\mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}(X,Z),\ (f,g) \mapsto gf,$$

die *Komposition* in der Kategorie heißt.

Diese Daten müssen folgende Axiome erfüllen:

(i) Für $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$ und $h \in \mathrm{Mor}(Z,W)$ (und Objekten X, Y, Z und W) gilt:

$$h(gf) = (hg)f \quad \text{(Assoziativität);}$$

(ii) für jedes Objekt X existiert ein Element $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}(X,X)$, so dass für alle Objekte Y und allen Morphismen $g \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ und $h \in \mathrm{Mor}(Y,X)$ gilt:

$$g\mathrm{id}_X = g, \quad \mathrm{id}_X h = h.$$

Kommentar 2.2.13 (a) Die *Identität* $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}(X,X)$ ist eindeutig bestimmt (siehe Aufgabe 2.4.14).

(b) Ist $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ und gibt es ein $g \in \mathrm{Mor}(Y,X)$, so dass $gf = \mathrm{id}_X$ und $fg = \mathrm{id}_Y$ist, so ist auch g eindeutig bestimmt (siehe Aufgabe 2.4.14). Es heißt dann f ein *Isomorphismus* der Kategorie und X und Y *isomorph*.

Beispiel 2.2.14 (a) Die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$ der Mengen mit ihren Abbildungen, $\mathrm{Mor}(X,Y) := \mathrm{Abb}(X,Y)$, und der Komposition von Abbildungen;

(b) die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ der topologischen Räume mit den stetigen Abbildungen und ihren Kompositionen;

(c) die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{HTop}$ der topologischen Räume mit den Homotopieklassen von stetigen Abbildungen, $\mathrm{Mor}(X,Y) = [X,Y]$, und ihren Kompositionen;

(d) die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Top}_0$ der punktierten topologischen Räume (vgl. Kommentar 2.2.11.(a), zusammen mit ihren offensichtlichen Morphismen und ihrer offensichtlichen Komposition);

(e) die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}$ der Gruppen und ihrer Homomorphismen.

(f) Sei K ein Körper. Dann haben wir die Kategorie $\mathbf{Vect}_K$ der K-Vektorräume und ihrer linearen Abbildungen;

(g) die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ der abelschen Gruppen;

(h) die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Mf}$ der (differenzierbaren) Mannigfaltigkeiten, ...

Definition 2.2.15 Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Kategorien. Ein *(covarianter) Funktor* $T: \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ ordnet jedem Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ein Objekt $X_2 = T(X_1)$ in $\mathcal{C}_2$ zu und jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ in $\mathcal{C}_1$ einen Morphismus $T(f) = f_* \in \mathrm{Mor}(T(X_1), T(Y_1))$ in $\mathcal{C}_2$ so zu, dass folgendes gilt:

(a) Für jedes Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ist $T(\mathrm{id}_{X_1}) = \mathrm{id}_{T(X_1)}$;

(b) für je zwei komponierbare Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ und $g \in \mathrm{Mor}(Y_1, Z_1)$ in $\mathcal{C}_1$ gilt:

$$T(gf) = T(g)T(f) \quad \text{kurz: } (gf)_* = g_* f_*.$$

Beispiel 2.2.16 (a) Es ist $\pi_1: \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Grp}$ ein Funktor, denn

$$\pi_1(\mathrm{id})([\alpha]) = [\mathrm{id} \circ \alpha] = [\alpha]$$

für alle $\alpha \in \mathcal{C}(p)$ für einen punktierten Raum (X, p), also schon mal

$$\pi_1(\mathrm{id}_{(X,p)}) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,p)}.$$

Außerdem ist für alle komponierbaren Morphismen f und g in $\mathbf{Top}_0$

$$\begin{aligned}(\pi_1(gf))([\alpha]) &= [g \circ f \circ \alpha] = \pi_1(g)([f \circ \alpha]) \\ &= \pi_1(g)\pi_1(f)([\alpha]),\end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \mathcal{C}(p)$.

(b) Für jeden topologischen Raum X sei $\pi_0(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Teilmenge der *Wegkomponenten* von X,

$$X = \dot{\bigcup}_{i \in I} U(x_i)$$

mit

$$U(x_i) = \{y \in X : \text{ es gibt einen Weg von } x_i \text{ nach } y\},$$

wo $(x_i)_{i \in I}$ ein *vollständiges Repräsentantensystem* ist,

$$\pi_0(X) = \{U(x_i) : i \in I\}$$

(vgl. auch 1.3.11). Für ein stetiges $f: X \to Y$, mit

$$X = \dot{\bigcup}_{i \in I} U(x_i), \quad Y = \dot{\bigcup}_{j \in J} U(y_j),$$

existiert für jedes $i \in I$ genau ein $j \in J$, so dass $f(U(x_i)) \subseteq U(y_j)$ ist. Setze nun $\pi_0(f) = f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$,

$$f_*(U(x_i)) = U(y_j).$$

Dann ist π_0 ein Funktor von $\mathbf{Top}$ nach $\mathbf{Ens}$.

(c) Man betrachte $\mathcal{C}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ gegeben durch $\mathcal{C}(X)$ den Kegel über X (vgl.1.2.10) und für $f\colon X \to Y$ setze $\mathcal{C}(f)\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$,

$$[(x,t)] \mapsto [(f(x),t].$$

Dann ist $\mathcal{C}$ ein Funktor von **Top** auf sich selbst.

Kommentar 2.2.17 (a) Für die Definition eines *kontravarianten* Funktors siehe Aufgabe 2.4.15.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Auf der k-Sphäre $\mathbb{S}^k$ betrachten wir den Punkt $\mathbf{1} := (1,0,\dots,0)$ und machen damit $\mathbb{S}^k$ zu einem punktierten Raum $(\mathbb{S}^k, \mathbf{1})$. Ist (X,p) ein beliebiger punktierter Raum, so nennen wir zwei Morphismen $\alpha, \beta\colon (\mathbb{S}^k, \mathbf{1}) \to (X,p)$ *homotop*, $\alpha \simeq \beta$, wenn es eine Homotopie $H\colon (\mathbb{S}^k, \mathbf{1}) \times I \to (X,p)$ gibt, die die Aufpunkte respektiert, $H(\mathbf{1},t) = p$ für alle $t \in I$. Dann nennt man

$$\pi_k(X,p) = \mathrm{Mor}((\mathbb{S}^k, \mathbf{1}), (X,p))/\simeq$$

die *k-te Homotopiegruppe* von (X,p). Sie misst, grob gesprochen, die „k-dimensionalen Löcher“ in (X,p). Für einen Morphismus $f\colon (X,p) \to (Y,q)$ setzt man dann natürlich weiter

$$\pi_k(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

Das ist wohldefiniert und macht π_k zu einem Funktor von $\mathbf{Top}_0$ nach **Ens** (siehe Aufgabe 2.4.17). Er stimmt für $k = 1$ im Wesentlichen mit dem Fundamentalgruppenfunktor überein (wenn man bei letzterem die Gruppenstruktur vergisst) und für $k = 0$ mit dem *Wegkomponentenfunktor* aus Beispiel 2.2.16 (vgl. Aufgabe 1.4.41). (Man kann für $k \geq 2$ die Menge $\pi_k(X,p)$ mit einer Gruppenstruktur versehen, die dann sogar abelsch ist (siehe Aufgabe 2.4.25).)

Bemerkung 2.2.18 *Sei $T\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ ein Funktor und $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}_1$. Dann ist auch $T(f)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}_2$.*

Beweis. Ist $g \in \mathrm{Mor}(Y,X)$ Inverses zu f, $gf = \mathrm{id}_X$, $fg = \mathrm{id}_X$, so ist $T(g) \in \mathrm{Mor}(T(Y),T(X))$ Inverses zu $T(f)$, denn

$$T(g)T(f) = T(gf) = T(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{T(X)}$$

und

$$T(f)T(g) = T(fg) = T(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{T(Y)}.$$

Also ist auch $T(f)$ ein Isomorphismus. □

Kommentar 2.2.19 (a) Haben für zwei topologische Räume X und Y die Mengen $\pi_0(X)$ und $\pi_0(Y)$ verschiedene *Kardinalität* (d.h.: gibt es keine Bijektion zwischen ihnen), so können X und Y also nicht homöomorph zueinander sein.

(b) Haben zwei wegzusammenhängende Räume X und Y (also $\pi_0(X) = \pi_0(Y) = \{0\}$) nicht-isomorphe Fundamentalgruppen, $\pi_1(X) \neq \pi_1(Y)$, so können sie nicht homöomorph zueinander sein.

Definition 2.2.20 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und seien X_1 und X_2 Objekte in $\mathcal{C}$.

(a) Ein Tripel (X, p_1, p_2) bestehend aus einem Objekt X in $\mathcal{C}$ und Morphismen $p_i \in \mathrm{Mor}(X, X_i)$ $(i = 1, 2)$ heißt ein *Produkt* in $\mathcal{C}$, wenn es zu jedem anderen solchen Tripel (Y, q_1, q_2), $q_i \in \mathrm{Mor}(Y, X_i)$ für $i = 1, 2$, genau einen Morphismus $\Phi \in \mathrm{Mor}(Y, X)$ gibt mit $p_i\Phi = q_i$ $(i = 1, 2,$ vgl. Diagramm 2.16).

Abbildung 2.16: universelle Eigenschaft des Produktes

(b) Ein Tripel (X, ι_1, ι_2) bestehend aus einem Objekt X in $\mathcal{C}$ und Morphismen $\iota_k \in \mathrm{Mor}(X_k, X)$ $(k = 1, 2)$ heißt *Summe* (oder *Coprodukt*) in $\mathcal{C}$, wenn es zu jedem anderen solchen Tripel (Y, j_1, j_2), $j_k \in \mathrm{Mor}(X_k, Y)$ für $k = 1, 2$, genau einen Morphismus $\Phi \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ gibt mit $\Phi\iota_k = j_k$ $(k = 1, 2,$ vgl Diagramm 2.17).

Kommentar 2.2.21 Produkte und Summen sind, sofern sie existieren, bis auf Isomorphie eindeutig (vgl. Aufgabe 2.4.21).

Beispiel 2.2.22 (a) In **Ens** existieren Produkte und Summen. Sie werden durch das cartesische Produkt $X_1 \times X_2$ bzw. die mengentheoretische Summe $X_1 + X_2$ mit ihren jeweiligen Abbildungen $p_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ $(i = 1, 2)$ bzw. $\iota_k\colon X_k \to X_1 + X_2$ $(k = 1, 2)$ gegeben.

Abbildung 2.17: universelle Eigenschaft der Summe

(b) Auch in **Top** existieren Produkte und Summen. Es sind dies $X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie und $X_1 + X_2$ mit der Summentopologie (und ihren jeweiligen Projektionen bzw. Inklusionen).

(c) Auch in $\mathbf{Top}_0$ existieren Produkte und Summen. Sind nämlich (X_1, p_1) und (X_2, p_2) punktierte Räume, so ist $(X_1 \times X_2, (p_1, p_2))$ ihr Produkt und die Einpunktvereinigung $(X_1 \vee X_2, p)$ mit $p = \iota_1(p_1) = \iota_2(p_2)$ ihre Summe (zusammen mit den natürlichen Abbildungen).

(d) Sei K ein Körper. Dann hat auch $\mathbf{Vect}_K$ Produkte und Summen. Sind V_1 und V_2 nämlich K-Vektorräume, so ist ihr Produkt $V_1 \times V_2$ (mit der offensichtlichen Vektorraumstruktur) sowohl ihr Produkt als auch ihre Summe. Allerdings gehören zum Produkt die Projektionen $p_i\colon V_1 \times V_2 \to V_i$ $(i = 1, 2)$, während zu der Summe die Inklusionen $\iota_1\colon V_1 \to V_1 \times V_2$, $v_1 \mapsto (v_1, 0)$ (und ähnlich für V_2) gehören. Meint man die Summe, so schreibt man deshalb häufig auch (will man die Abbildungen nicht eigens erwähnen) die Notation $V_1 \oplus V_2$. (Man beachte allerdings, dass die Objekte der Produkt- und Summenbildung bei unendlich vielen Faktoren bzw. Summanden auseinanderfallen, vgl. Aufgabe 2.4.24.)

(e) In **Grp** existieren auch Produkte und Summen. Für zwei Gruppen G_1 und G_2 ist das cartesische Produkt $G_1 \times G_2$ (mit der komponentenweise Multiplikation und ihren Projektionen) Produkt von G_1 und G_2 in **Grp** und das *freie Produkt* $G_1 * G_2$ (zusammen mit den natürlichen Inklusionen) ist ihre Summe in **Grp** (vgl. auch Kommentar 2.2.32.(b)).

Proposition 2.2.23 *Der Funktor $\pi_1\colon \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{Grp}$ respektiert Produkte: Für punktierte Räume (X_1, p_1) und (X_2, p_2) sowie den Projektionen $p_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ $(i = 1, 2)$ ist*

$$\Phi\colon \pi_1(X_1 \times X_2, (p_1, p_2)) \to \pi_1(X_1, p_1) \times \pi_1(X_2, p_2),$$

$$[\alpha] \mapsto ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]),$$

ein Isomorphismus.

Abbildung 2.18: der Funktor π_1 auf Produkten

Beweis. $\Phi = ((p_1)_*, (p_2)_*)$ ist die eindeutig bestimmte Abbildung, die das Diagramm 2.18 kommutieren lässt und damit sicher ein Homomorphismus. Zur Injektivität von Φ: Ist $\Phi([\alpha]) = (1,1)$, so ist $p_1 \circ \alpha \simeq c_{p_1}$ vermöge einer Homotopie $H_1 = (h_1)_s$ und ähnlich $p_2 \circ \alpha \simeq c_{p_2}$ vermöge eines $(h_2)_s$. Setzt man dann $h_s := ((h_1)_s, (h_2)_s) \colon I \to X_1 \times X_2$ (für $s \in I$), so ist $H = (h_s)$ eine Homotopie von α nach $c_{(p_1,p_2)}$, also $[\alpha] = 1$. Zur Surjektivität: Für $[\alpha_i] \in \pi_1(X_i, p_i)$ $(i = 1, 2)$ wähle (zunächst Repräsentanten und dann) $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \colon I \to X_1 \times X_2$. Dann ist $p_i \circ \alpha = \alpha_i$ und damit $\Phi([\alpha]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$. □

Korollar 2.2.24 *Zwei Tori $\mathbb{T}^n$ und $\mathbb{T}^m$ verschiedener Dimension, $n \neq m$, sind nicht homöomorph.*

Beweis. Es ist

$$\pi_1(\mathbb{T}^n) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1) = \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \cdots \times \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}^n$$

und $\mathbb{Z}^n \ncong \mathbb{Z}^m$ für $n \neq m$ (weil z.B. $\mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^n$ oder $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^n$ ist, $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ bzw. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q})$ Funktoren sind (vgl. Aufgabe 2.4.15.(c)) und $\mathbb{Q}^n \ncong \mathbb{Q}^m$ nach der bekannten Vektorraumtheorie). □

Kommentar 2.2.25 (a) Seien (X, p) und (Y, q) punktierte topologische Räume und $f, g \colon (X, p) \to (Y, q)$ stetig. Eine Homotopie $H = (h_t)$ von f nach g ist eine stetige Abbildung $H \colon X \times I \to Y$, so dass $h_t(p) = q$ ist, für alle $t \in I$ und $h_0 = f$ und $h_1 = g$.

(b) Betrachtet man die Äquivalenzklassen $[f]$ unter der Homotopierelation als Morphismen von (X,p) nach (Y,q), so spricht man von der *Homotopie-Kategorie* der punktierten topologischen Räume $\mathbf{HTop}_0$.

Bemerkung 2.2.26 *Sind $f, g\colon (X,p) \to (Y,q)$ homotop zueinander, so ist $\pi_1(f) = \pi_1(g)\colon \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,q)$.*

Beweis. Sei $\alpha \in \mathcal{C}(p)$ eine beliebige *Schleife* in (X,p). Ist nun (h_t) eine Homotopie von f nach g, so ist $(h_t \circ \alpha)$ eine Homotopie von $f \circ \alpha$ nach $g \circ \alpha$. Damit ist

$$\pi_1(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [g \circ \alpha] = \pi_1(g)([\alpha]).$$

□

Kommentar 2.2.27 (a) Ist (X,p) ein punktierter Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum von X mit $p \in A$ (wir schreiben dann auch $(A,p) \subseteq (X,p)$), so nennen wir einen Morphismus $r\colon (X,p) \to (A,p)$ eine *Retraktion in* $\mathbf{Top}_0$, wenn $r\colon X \to A$ ein Retraktion ist mit $r(p) = p$. Ähnlich nennen wir $r\colon (X,p) \to (A,p)$ eine *Deformationsretraktion in* $\mathbf{Top}_0$, wenn zudem für die Inklusion $\iota\colon (A,p) \to (X,p)$ gilt: $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_{(X,p)}$ (in $\mathbf{Top}_0$).

(b) Noch schärfer nennt man einen Teilraum A eines topologischen Raumes X einen *starken Deformationsretrakt*, wenn es eine stetige Abbildung $r\colon X \to A$ mit $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$ gibt, so dass $\iota \circ r \simeq\ id_X$ sogar relativ A ist (eine *starke Deformationsretraktion*).

(c) Zwei punktierte Räume (X,p) und (Y,q) heißen *homotopieäquivalent in* $\mathbf{Top}_0$, wenn es einen Isomorphismus $f\colon (X,p) \to (Y,q)$ in $\mathbf{HTop}_0$ gibt.

Korollar 2.2.28 *Ist $(A,p) \subseteq (X,p)$ ein Deformationsretrakt, so induziert die Inklusion $\iota\colon (A,p) \to (X,p)$ einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen $\iota_*\colon \pi_1(A,p) \to \pi_1(X,p)$.*

Beweis. Ist $r\colon (X,p) \to (A,p)$ eine Deformationsretraktion, so ist $r \circ \iota = \mathrm{id}_{(A,p)}$ und $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_{(X,p)}$. Es folgt

$$r_* \circ \iota_* = (r \circ \iota)_* = (\mathrm{id}_{(A,p)})_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A,p)}$$

und

$$\iota_* \circ r_* = (\iota \circ r)_* = (\mathrm{id}_{(X,p)})_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,p)}$$

nach Bemerkung 2.2.26. Also ist ι_* ein Isomorphismus. □

Kommentar 2.2.29 Allgemeiner sind für zwei homotopieäquivalente punktierte Räume (X,p) und (Y,q) ihre Fundamentalgruppen isomorph, $\pi_1(X,p) \cong \pi_1(Y,q)$. Das folgt aus 2.2.18, denn π_1 *faktorisiert* über den Funktor $\simeq$: $\mathbf{Top_0} \to \mathbf{HTop_0}$, der die Objekte erhält, aber bei den Morphismen zu den Homotopieklassen übergeht, nach Bemerkung 2.2.26, d.h.: es gibt einen Funktor $\bar{\pi}_1 \colon \mathbf{HTop_0} \to \mathbf{Grp}$ mit $\bar{\pi}_1 \circ \simeq = \pi_1$,

$$\pi_1(X,p) = \bar{\pi}_1(X,p) \cong \bar{\pi}_1(Y,q) = \pi_1(Y,q).$$

(vgl. Abbildung 2.19).

Abbildung 2.19: die Faktorisierung von π_1

Beispiel 2.2.30 Es ist

$$\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \{p\}) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$$

und sogar allgemeiner für alle $g \in \mathbb{N}$

$$\pi_1(\mathbb{F}_g \setminus \{p\}) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1) \quad (2g\text{-mal}),$$

denn die Deformationsretraktion von Beispiel 2.10 (*Zentralprojektion* radial nach außen) hält den Basispunkt (sagen wir den Punkt, der durch die Identifikations der Ecken in E_{4g} bestimmt ist) fest. Es ist sogar eine starke Deformationsretraktion.

Definition 2.2.31 Seien G_1 und G_2 Gruppen. Das *freie Produkt* $G_1 * G_2$ besteht aus allen *Worten*

$$g = g_1 \cdots g_k$$

(d.h. formalen Ausdrücken oder abbrechenden Folgen) mit $k \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt:

(a) $g_j \in G_1$ oder $g_j \in G_2$ für $j = 1, \ldots, k$ und g_j und g_{j+1} sind nicht aus der gleichen Gruppe ($j = 1, \ldots, k-1$). (Natürlich kann man auch das freie Produkt einer Gruppe G mit sich selbst bilden, aber dann zählen die *Buchstaben* eines Wortes g abwechselnd zu dem ersten und zweiten Faktor.)

(b)
$$g_j \neq 1 \quad \text{für } j = 1 \ldots, k.$$

$k \in \mathbb{N}_0$ heißt die *Länge* des Wortes $g = g_1 \cdots g_k$. Das *leere Wort* $g =$ hat Länge 0. Zwei Worte $g = g_1 \cdots g_k$ und $h = h_1 \cdots h_l$ werden so multipliziert:
$$gh = g_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_l,$$
wobei anschließend das Wort in die *reduzierte Form* durch Ausmultiplizieren in G_1 bzw. G_2 und durch Weglassen der Einselemente gebracht werden muss.

Kommentar 2.2.32 (a) $G_1 * G_2$ wird damit zu einer Gruppe. Ihr Einselement ist das leere Wort und das Inverse zu $g = g_1 \cdots g_k$ ist
$$g^{-1} = g_k^{-1} \cdots g_1^{-1}.$$
Weiter bezeichne $\iota_s \colon G_s \to G_1 * G_2$, $g \mapsto \iota_s(g)$, das Wort, welches nur aus dem einen Buchstaben $g \in G_s$ besteht ($s = 1, 2$).

(b) Es ist dann $(G_1 * G_2, \iota_1, \iota_2)$ die Summe von G_1 und G_2 in der Kategorie der Gruppen, denn ist (H, j_1, j_2) ein weiteres Tripel, wo H eine Gruppe und $j_s \colon G_s \to H$ Homomorphismen sind ($s = 1, 2$), so existiert genau ein Homomorphismus $\Phi \colon G_1 * G_2 \to H$ mit $\Phi\iota_s = j_s$ ($s = 1, 2$), nämlich $\Phi =: (j_1, j_2)$, d.h.:
$$\Phi(g_1 \cdots g_k) = j_{i_1}(g_1) \cdots j_{i_k}(g_k) \quad (\text{Multiplikation in } H),$$
wobei $i_r = 1$ ist, falls $g_r \in G_1$ ist, und $i_r = 2$, wenn $g_r \in G_2$ ist ($r = 1, \ldots, k$).

Erinnerung 2.2.33 Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt ein *Normalteiler* in G, wir schreiben dann $H \trianglelefteq G$, wenn
$$gH = Hg$$
ist, für alle $g \in G$. Die Menge der Linksnebenklassen
$$G/H = \{gH \in \mathcal{P}(G) : \ g \in G\}$$
trägt dann vermöge $g_1 H \cdot g_2 H = (g_1 g_2) H$ selbst eine Gruppenstruktur und $\pi \colon G \to G/H$, $g \mapsto gH$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit $\ker(\pi) = H$ (vgl. auch Aufgabe 2.4.28).

Abbildung 2.20: das freie Produkt

Definition 2.2.34 Sei G eine Gruppe und $A \subseteq G$ eine Teilmenge. Wir setzen dann

(a)
$$\langle A \rangle := \bigcap \{H \subseteq G : \ H \text{ ist Untergruppe}, H \supseteq A\},$$
und nennen dies die von A *erzeugte Untergruppe* in G;

(b)
$$N(A) := \bigcap \{H \subseteq G : \ H \text{ ist Normalteiler}, H \supseteq A\},$$
und nennen dies den von A *erzeugten Normalteiler* in G.

Kommentar 2.2.35 (a) Es ist $\langle A \rangle \subseteq G$ die kleinste Untergruppe, die A enthält und $N(A)$ der kleinste Normalteiler, der A enthält.

(b) Eine Gruppe G heißt von einer Teilmenge A *erzeugt*, wenn $\langle A \rangle = G$ ist. Sie heißt von A *als Normalteiler erzeugt*, wenn $N(A) = G$ ist.

(c) Konkreter ist
$$\langle A \rangle = \{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k} \in G : \ k \in \mathbb{N}_0, \ a_r \in A, \ n_r \in \mathbb{Z}, \ r = 1, \dots k\}$$
und
$$\begin{aligned} N(A) \ &= \ \{b_1^{n_1} \cdots b_k^{n_k} \in G : \ b_r = g_r a_r g_r^{-1}, \ g_r \in G, \ a_r \in A, \\ &\quad\ n_r \in \mathbb{Z}, \ r = 1, \dots k\}. \end{aligned}$$

(d) Sei A eine Menge. Für jedes $a \in A$ sei

$$F(a) := \{a^n : \ n \in \mathbb{Z}\}$$

die von a erzeugte *unendlich zyklische Gruppe* (und damit $F(a) \cong \mathbb{Z}$). Das freie Produkt

$$F(A) := *_{a\in A} F(a)$$

heißt die *von A erzeugte freie Gruppe*. Sie besteht aus allen Worten

$$g = a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$$

($k \in \mathbb{N}_0$, $a_r \in A$ und $n_r \in \mathbb{Z}$ für $r = 1, \ldots, k$) im *Alphabet* A (siehe auch Aufgabe 2.4.29).

(e) Ist G eine Gruppe und $A \subseteq G$ ein Erzeugendensystem von G, so hat man also einen surjektiven Homomorphismus $f\colon F(A) \to G$ (vgl. Aufgabe 2.4.29), gegeben durch

$$a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k} \mapsto a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k},$$

wobei nun die Notation etwas überlastet ist, weil wir links das Wort in $F(A)$ meinen (A als blanke Menge betrachtet) und rechts die Elemente in G ausmultipliziert werden müssen.

(f) Ist $A \subseteq G$ ein Erzeuger für eine Gruppe G und $R \subseteq F(A)$ ein Erzeuger als Normalteiler für $\ker(f)$, $N(R) = \ker(f)$, so sagt man, dass G durch die Erzeuger $A \subseteq G$ und die *Relationen* $R \subseteq F(A)$ *repräsentiert* ist. Es ist dann

$$G \cong F(A)/N(R)$$

und man schreibt

$$G = \langle A|R \rangle.$$

Proposition 2.2.36 *Sei X ein topologischer Raum und $U, V \subseteq X$ offen, so dass $X = U \cup V$ und U, V und $U \cap V$ wegzusammenhängend sind. Sei weiter $p \in U \cap V$ und bezeichnen $j_1\colon (U, p) \to (X, p)$ bzw. $j_2\colon (V, p) \to (X, p)$ die Inklusionen. Dann gilt, dass der induzierte Homomorphismus*

$$\Phi = ((j_1)_*, (j_2)_*)\colon \pi_1(U, p) * \pi_1(V, p) \to \pi_1(X, p)$$

surjektiv ist (siehe auch Diagramm 2.21).

Abbildung 2.21: der induzierte Homomorphismus

Kommentar 2.2.37 (a) Man beachte, dass schon $(j_1)_*\colon \pi_1(U,p) \to \pi_1(X,p)$ nicht mehr injektiv zu sein braucht, denn ein geschlossener Weg α in U kann ja in X zu p zusammenziehbar sein, nicht aber in U.

(b) Ist α ein Weg in U, so schreiben wir $[\alpha]_U$ für die Äquivalenzklasse in $\pi_1(U,p)$ und $[\alpha]_X$ oder nur $[\alpha]$ für die Äquivalenzklasse in $\pi_1(X,p)$. Es ist also

$$(j_1)_*([\alpha]_U) = [\alpha]_X.$$

Beweis von 2.2.36. Sei α ein geschlossener Weg in (X,p). Da $\alpha^{-1}(U)$ offen und I lokal wegzusammenhängend ist, ist jede Wegkomponente von $\alpha^{-1}(U)$ offen und wegzusammenhängend und damit ein Intervall (vgl. Aufgabe 2.4.30). Da nun $X = U \cup V$ ist, überdecken die Wegkomponenten von $\alpha^{-1}(U)$ und $\alpha^{-1}(V)$ das Einheitsintervall I. Da dieses kompakt ist, kommt man mit nur endlich vielen dieser Wegkomponenten aus und indem man man evtl. überflüssige noch einmal weglässt, kann man diese Intervalle so anordnen, dass sie abwechselnd zu $\alpha^{-1}(U)$ bzw. $\alpha^{-1}(V)$ gehören. Es gibt deshalb eine Unterteilung $0 = t_0 \leq \cdots \leq t_k = 1$ (mit $k \in \mathbb{N}$) von I derart, dass $[t_{r-1}, t_r]$ abwechselnd zu $\alpha^{-1}(U)$ bzw. $\alpha^{-1}(V)$ gehört ($r = 1, \ldots, k$). Insbesondere ist $p_r := \alpha(t_r) \in U \cap V$ für $r = 0, \ldots, k$. Wir definieren nun $\alpha_r\colon I \to W$, wobei nun W für U oder V stehe, durch

$$\alpha_r(\tau) := \alpha((1-\tau)t_{r-1} + t_r)$$

($r = 1, \ldots, k$). Es ist dann

$$\alpha \simeq \alpha_1 * \cdots * \alpha_r$$

(wie immer man die rechte Seite klammert). Da nun $U \cap V$ wegzusammenhängend ist, existieren Wege γ_r von p nach p_r in $U \cap V$, wobei wir wegen

$p_0 = p_k = p$ die Wege γ_0 und γ_k als den konstanten Weg c_p annehmen dürfen. (Die Voraussetzung, dass auch U und V, und damit auch X, wegzusammenhängend sind, brauchen wir nicht. Man bekommt ohne sie freilich auch nur eine Aussage über die Wegkomponenten von U, V bzw. X, die p enthalten.) Nun definieren wir die geschlossenen Wege β_r,

$$\beta_r := \gamma_{r-1} * \alpha_r * \gamma_r,$$

welche wir abwechselnd in U bzw. V liegend betrachten. Es ist nun einerseits

$$\alpha \simeq \alpha_1 * \cdots * \alpha_r \simeq \beta * \cdots * \beta_r,$$

und andererseits

$$[\beta_r] = (j_i)_*([\beta_r]_W),$$

wobei $i = 1$ ist, wenn $W = U$ ist und $i = 2$ bei $W = V$. Nun ist klar, dass

$$\begin{aligned} \Phi([\beta]_{U_1} \cdots [\beta_k]_{U_k}) &= (j_{i_1})_*([\beta_1]_{U_1}) \cdots (j_{i_k})_*([\beta_k]_{U_k}) \\ &= [\beta_1] \cdots [\beta_k] = [\alpha] \end{aligned}$$

ist, wobei man nun abwechselnd $i_r = 1$ oder $i_r = 2$ bzw. $U_r = U$ bzw. $U_r = V$ setzen muss. Φ ist also surjektiv. □

Abbildung 2.22: zum Beweis von Proposition 2.2.36

Korollar 2.2.38 *Ist ein topologischer Raum X Vereinigung zweier offener einfach zusammenhängender Teilmengen U und V, deren Durchschnitt wegzusammenhängend ist, so ist X auch einfach zusammenhängend.*

Beweis Da $\pi_1(U) = (1)$ und $\pi_1(V) = (1)$ ist, ist natürlich auch $\pi_1(U) * \pi_1(V) = (1)$ und daher auch das Bild von Φ aus 2.2.36, welches aber ganz $\pi_1(X)$ ist, also tatsächlich

$$\pi_1(X) = (1).$$

□

Beispiel 2.2.39 (a) Die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend,

$$\pi_1(\mathbb{S}^n) = (1),$$

denn $U = \mathbb{S}^n \backslash \{\text{Südpol}\} \cong \mathbb{R}^n$ und $V = \mathbb{S}^n \backslash \{\text{Nordpol}\} \cong \mathbb{R}^n$ erfüllen die Voraussetzungen des Korollars 2.2.38. ($\mathbb{S}^1$ ist, wie wir ja schon wissen (siehe Bemerkung 2.2.10) nicht einfach zusammenhängend und $\mathbb{S}^0$ ist ja nicht mal wegzusammenhängend.)

(b) Es ist $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^2$ für $n \geq 3$ (und für $n = 1$ auch nicht, wie wir ja schon wissen (siehe Beispiel 1.3.12), und für $n = 0$ sowieso), denn ist $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^2$, so ist auch $\mathbb{R}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$). Aber $\mathbb{S}^{n-1}$ ist ein (starker) Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ und hat damit die gleiche Fundamentalgruppe. Das führt auf den Widerspruch

$$(1) = \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}) = \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z},$$

für $n \geq 3$. (Es ist auch richtig, dass sogar $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ ist für alle $n \neq m$ (siehe 3.3.3). Der Beweis erfordert allerdings andere Funktoren wie π_0 (bei $n = 1$) und π_1 (bei $n = 2$).)

(c) Für alle $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist auch

$$\mathbb{T}^n \not\cong \mathbb{S}^m,$$

außer natürlich für $(n, m) = (1, 1)$, denn $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$ nach Definition. (Hier verstehen wir $\mathbb{T}^0$ als den einpunktigen Raum.) Es ist nämlich $\pi_1(\mathbb{S}^m) = (1)$ für $m \geq 2$, während $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist also

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{S}^2$$

(beachte aber „das Potenzgesetz“ 1.2.11.(b)).

Vorbereitung 2.2.40 Was liegt also nun im Kern von $\Phi = ((j_1)_*, (j_2)_*)$? Bezeichnen wir dazu mit $i_1 \colon U \cap V \to U$ und $i_2 \colon \mathrm{U} \cap V \to V$ die natürlichen Inklusionen. Weil nun offenbar das Diagramm 2.23 kommutiert, $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$, ist sicher

$$(j_1)_*(i_1)_*([\alpha]_{U\cap V}) = (j_2)_*(i_2)_*([\alpha]_{U\cap V}) = [\alpha],$$

für alle $[\alpha] \in \pi_1(U \cap V, p)$, Wir setzen nun $N \trianglelefteq \pi_1(U, p) * \pi_1(V, p)$ den von den zweibuchstabigen Wörtern $(i_1)_*([\alpha])(i_2)_*([\alpha]^{-1})$ ($[\alpha] \in \pi_1(U \cap V, p)$) erzeugten Normalteiler,

$$N := N\left((i_1)_*([\alpha])(i_2)_*([\alpha]^{-1}) \in \pi_1(U_p) * \pi_1(V, p) : \ [\alpha] \in \pi_1(U \cap V, p)\right),$$

und nennen dies den von $\pi_1(U \cap V)$ *erzeugten Normalteiler* in $\pi_1(U) * \pi_1(V)$.

Abbildung 2.23: der von $U \cap V$ erzeugte Normalteiler

Lemma 2.2.41 *Für alle $c \in N \subseteq \pi_1(U,p) * \pi_1(V,p)$ ist $\Phi(c) = 1$.*

Beweis. Ist

$$c = (i_1)_*([\alpha])(i_2)_*([\alpha]^{-1})$$

für ein $\alpha \in \pi_1(U \cap V, p)$, so ist

$$\begin{aligned}\Phi(c) &= (j_1)_*(i_1)_*([\alpha])(j_2)_*(i_2)_*([\alpha]^{-1}) \\ &= (j_1)_*(i_1)_*([\alpha])((j_2)_*(i_2)_*([\alpha]))^{-1} = [\alpha]_X[\alpha_X]^{-1} = 1,\end{aligned}$$

und da $\ker(\Phi) \subseteq \pi_1(U,p) * \pi_1(V,p)$ ein Normalteiler, folgt:

$$\ker(\Phi) \supseteq N.$$

□

Satz 2.2.42 *(Seifert-van Kampen). Sei X ein topologischer Raum, U und V sei offen mit $U \cup V = X$ und es seien U, V und $U \cap V$ wegzusammenhängend sowie $p \in U \cap V$. Sei $\Phi\colon \pi_1(U,p) * \pi_1(V,p) \to \pi_1(X),p)$ der von den Inklusionen induzierte Homomorphismus, $N \trianglelefteq \pi_1(U,p) * \pi_1(V,p)$ der von $\pi_1(U \cap V, p)$ erzeugte Normalteiler und schließlich*

$$\hat{\Phi}\colon (\pi_1(U,p) * \pi_1(V,p))/N \to \pi_1(X,p)$$

der davon induzierte Homomorphismus. Dann gilt: $\hat{\Phi}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir kürzen zunächst ab: $G_1 = \pi_1(U,p)$, $G_2 = \pi_1(V,p)$ und $G = \pi_1(X,p)$ und notieren für ein $c \in G_1 * G_2$ mit $\hat{c}$ die Restklasse in $G_1 * G_2/N$, $\hat{c} = cN$. Für jeden geschlossenen Weg β in $U \cap V$ ist dann

$$\widehat{[\beta]}_U = \widehat{[\beta]}_V,$$

denn

$$[\beta]_U[\beta]_V^{-1} = (i_1)_*([\beta]_{U\cap V})((i_2)_*([\beta]_{U\cap V})^{-1} \in N.$$

Sei nun $c = [\beta_1]\cdots[\beta_k] \in G_1 {*} G_2$ mit $\Phi(c) = 1$, wobei nun β_r $(r = 1, \dots k)$ ein geschlossener Weg in U bzw. V ist. Zu zeigen ist: $\hat{c} = 1$, denn $\hat{\Phi}$ ist ohnehin schon surjektiv, weil Φ es ist nach 2.2.36. Es existiert also eine Homotopie $H\colon I^2 \to X$ von

$$\beta := \beta_1 * \cdots * \beta_r$$

auf c_p, wobei wir die rechte Seite so paramatrisiert verstehen wollen, dass β_r auf $[(r-1)/k, r/k]$ parametrisiert ist $(r = 1, \dots k)$. Wir wollen nun im Folgenden k evtl. erhöhen, zerlegen dabei die Wege in β_r in ein Produkt von Teilwegen und nehmen dabei in Kauf, dass die einzelnen Wege zwar immer noch in U oder V verlaufen, aber nicht mehr notwendig geschlossen sind. Es ist nämlich $(H^{-1}(U), H^{-1}(V))$ ein offene Überdeckung der kompakten Teilmenge I^2. Deshalb gibt es eine *Lebesguesche Zahl* $\lambda > 0$ für diese Überdeckung, d.h.: eine Teilmenge $Q \subseteq I^2$, deren Durchmesser kleiner als λ ist, liegt in $H^{-1}(U)$ oder $H^{-1}(V)$ (vgl. Aufgabe 2.4.31). Wir können deshalb k so weit vergrößern, dass für jedes Teilquadrat $(0 \leq r, s \leq k-1)$

$$Q = [\frac{r}{k}, \frac{r+1}{k}] \times [\frac{s}{k}, \frac{s+1}{k}]$$

gilt: $H(Q) \subseteq U$ oder $H(Q) \subseteq V$.

Abbildung 2.24: zum Beweis des Satzes von Seifert und van Kampen

Sei nun $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ das *Gitter* $\frac{1}{k}\mathbb{Z} \times \frac{1}{k}\mathbb{Z}$. Weil U, V und $U \cap V$ wegzusammenhängend sind, können wir nun Hilfswege γ_q von p nach $H(q)$ in U, bzw. V oder sogar in $U \cap V$ für jeden Punkt $q \in \Gamma \cap I^2$ wählen, je nach dem, ob $H(q) \in U \setminus V$, $V \setminus U$ oder in $U \cap V$ liegt. Für die Gitterpunkte, die auf den Seiten $\{0\} \times \mathbb{Z}$ bzw. $\{1\} \times \mathbb{Z}$ liegen, nehmen wir wieder $\gamma_q = c_p$ an.

Nun betrachten wir für jede Kante v von q_1 nach einem benachbarten q_2 den geschlossenen Weg

$$\bar{v} := \gamma_{q_1} * (H \circ v) * \gamma_{q_2}^{-1}$$

(siehe Abbildung 2.25).

Abbildung 2.25: die Hilfswege $\bar{v}$

In I^2 gilt nun für jedes Quadrat $Q \subseteq I^2$ mit Kanten u, r, o, l (unten, rechts, oben, links), dass $u * r \simeq l * o$ rel $\{0,1\}$ ist. Deshalb ist auch $\bar{u} * \bar{r} \simeq \bar{l} * \bar{o}$ (in U, V bzw. $U \cap V$) und damit

$$\widehat{[\bar{u}]}\widehat{[\bar{r}]} = \widehat{[\bar{l}]}\widehat{[\bar{o}]},$$

wobei wir nun nicht mehr darauf achten müssen, ob wir die Klasse in G_1 oder G_2 betrachten. Sind nun $h_s, h_{s+1} \colon I \to I^2$ benachbarte Horizontalen, so ist

$$\begin{aligned} h_{s+1} &\simeq o_1 * \cdots * o_k \\ &\simeq (l_1^{-1} * u_1 * r_1) * \cdots * (l_k^{-1} * u_k * r_k), \end{aligned}$$

und weil $\bar{l}_1^{-1} = c_p = \bar{r}_k$ und $r_j = l_{j+1}$ ist, ist

$$\widehat{[r_j]}\widehat{[l_{j+1}^{-1}]} = 1$$

und damit

$$\begin{aligned} \widehat{[\bar{h}_{s+1}]} &:= \widehat{[\bar{o}_1]} \cdots \widehat{[\bar{o}_k]} \\ &= \widehat{[\bar{u}_1]} \cdots \widehat{[\bar{u}_k]} = \widehat{[\bar{h}_s]}, \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots k-1$. Iteriertes Anwenden liefert deshalb

$$\hat{c} = \widehat{[\beta_1 * \cdots * \beta_k]} = \widehat{[\bar{h}_0]} = \widehat{[\bar{h}_k]} = \widehat{[c_p]} \cdots \widehat{[c_p]} = 1.$$

□

Korollar 2.2.43 *Ist X Vereinigung wegzusammenhängender, offener Mengen U und V, deren Durchnitt einfach zusammenhängend ist, so ist*

$$\pi_1(X) = \pi_1(U) * \pi_1(V).$$

Beweis. Wegen $\pi_1(U \cap V) = (1)$ ist hier natürlich $N = (1)$. □

Beispiel 2.2.44 (a) Ist X ein Bukett aus n Kreislinien, so ist $\pi_1(X)$ die freie Gruppe in n Erzeugern,

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z} = F(a_1, \ldots, a_n).$$

Insbesondere ist im Falle der Figur „Acht“:

$$\pi_1(\text{Acht}) = F(\alpha, \beta)$$

(siehe Abbildung 2.26). Man verdickt nämlich etwa bei der Figur Acht die beiden Summanden $\iota_1(\mathbb{S}^1)$ und $\iota_2(\mathbb{S}^1)$ zu offenen Teilmengen U_1 und U_2, die einerseits homotopieäquivalent zu $\mathbb{S}^1$ sind und deren Durchschnitt andererseits zusammenziehbar, insbesondere einfach zusammenhängend, ist. Ähnlich argumentiert man bei mehreren Summanden.

Abbildung 2.26: die Erzeuger der Fundamentalgruppe der Acht

(b) Für die Brezelfläche $\mathbb{F}_g$ vom Geschlecht $g \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\pi_1(\mathbb{F}_g) = F(a_1, b_1, a_2, \ldots, a_g, b_g)/N(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}),$$

also der freien Gruppe in $2g$ Erzeugern mit einer einzigen Relation. Denn hier kann man $U = \mathbb{F}_g \setminus \{p\}$ und $V = B^2$, einer (kleinen, offenen) Kreisscheibe um p, setzen. Dann ist $\pi_1(U) = F(a_1, \ldots, b_g)$, $\pi_1(V) = (1)$ und $U \cap V = B^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^1$, und für einen der beiden Erzeuger $\alpha \in \pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$ ist

$$(i_1)_*([\alpha]) = [a_1 * \cdots * b_g^{-1}]$$

(vgl. Abbildung 2.27).

Abbildung 2.27: die Fundamentalgruppe der Brezelfläche

2.3 Überlagerungen

Definition 2.3.1 Sei X ein zusammenhängender Raum. Ein Paar $(\tilde{X}, \pi)$ heißt *(zusammenhängende) Überlagerung* von X, wenn $\tilde{X}$ ein zusammenhängender Raum ist und $\pi\colon \tilde{X} \to X$ stetig ist, so dass gilt: Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung $U \subseteq X$, so dass

$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{i\in I} \tilde{U}_i$$

mit offenen Mengen $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}$ ist, derart, dass $\pi|\tilde{U}_i\colon \tilde{U}_i \to U$ ein Homöomorphismus ist.

Abbildung 2.28: eine Überlagerung

Kommentar 2.3.2 (a) Ist $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von $x \in X$ wie in 2.3.1, so sagen wir, dass U *gleichmäßig überlagert* ist.

(b) Das Urbild $F \subseteq \tilde{X}$ eines Punktes $x \in X$, $F = \pi^{-1}(x)$, nennt man die *Faser* von π über x. Ihre Teilraumtopologie ist diskret (vgl. auch Aufgabe 2.4.36).

(c) Die Kardinalität card(I) der Faser über $x \in X$ ist unabhängig von x. Denn ist $U \subseteq X$ eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von x und $y \in U$ beliebig, so ist offenbar

$$\mathrm{card}(\pi^{-1}(y)) = \mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(\pi^{-1}(x)).$$

Definiert man daher $x \sim y$ in X, wenn $\mathrm{card}(\pi^{-1}(x) = \mathrm{card}(\pi^{-1}(y)$ ist, so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, bei der jede Äquivalenzklasse offen ist. Da X aber zusammenhängend ist, kann es deshalb nur eine

Äquivalenzklasse geben (denn eine Klasse ist offen und ihr Kompliment, als Vereinigung offener Klassen, auch). D.h.: Alle Fasern haben die gleiche Kardinalität. Insbesondere ist π surjektiv. Diese Kardinalität heißt dann die *Blätterzahl* von π. Für ein gleichmäßig überlagertes $U \subseteq X$ mit

$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{i \in I} \tilde{U}_i$$

heißen $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}$ die *Blätter* von π über U.

Beispiel 2.3.3 (a) $\pi = \mathrm{ex}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ ist eine (abzählbar) unendlich-blättrige Überlagerung, denn für $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ bzw. $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ ist

$$\mathrm{ex}^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1) \text{ bzw. } \mathrm{ex}^{-1}(V) = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{Z}} (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}),$$

und $\mathrm{ex}|(n, n+1)$ bzw. $\mathrm{ex}|(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ sind Homöomorphismen (vgl. Aufgabe 2.4.37.(a)).

(b) Für jeden zusammenhängenden Raum X ist die Identität eine (1-blättrige) Überlagerung.

(c) Auch die Potenzfunktion $\mathrm{pot}_n\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$, ist für $n \in \mathbb{N}$ eine Überlagerung (siehe Aufgabe 2.4.37.(b)). Sie hat die Blätterzahl n.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n/\!\sim$ der reell-projektive Raum. Dann ist auch die kanonische Projektion $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ eine Überlagerung (siehe Aufgabe 2.4.37.(c)). Sie hat die Blätterzahl 2.

Kommentar 2.3.4 (a) Eine Überlagerung $\pi\colon \tilde{X} \to X$ ist also notwendig surjektiv und ein *lokaler Homöomorphismus*, d.h.: für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gibt es eine Umgebung $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$, so dass mit $U := \pi(\tilde{U})$ gilt: $U \subseteq X$ ist offen und $\pi|\tilde{U}\colon \tilde{U} \to U$ ist ein Homöomorphismus.

(b) Es ist aber z.B. $\mathrm{ex}|(0, 2)\colon (0, 2) \to \mathbb{S}^1$ surjektiv und lokal homöomorph, aber keine Überlagerung (denn $\pi^{-1}(1)$ hat nur ein Element, $\pi^{-1}(z)$ aber zwei Elemente, für $z \neq 1$).

Definition 2.3.5 (a) Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G, auf der eine Topologie derart gegeben ist, dass die Multiplikation $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$, und die Inversenbidung $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, stetig sind. ($G \times G$ trägt dabei natürlich die Produkttopologie.)

(b) Eine topologische Gruppe heißt *diskret*, wenn G die diskrete Topologie trägt.

Beispiel 2.3.6 (a) Die *allgemeinen linearen Gruppen* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sind mit den von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologien topologische Guppen. Das Gleiche gilt für jede (abgeschlossene) Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), z.B. der *orthogonalen Gruppe* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ oder der *unitären Gruppe* $U(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ($n \in \mathbb{N}$).

(b) Jede endliche Gruppe oder auch $G = \mathbb{Z}$ ist mit der diskreten Topologie eine diskrete Gruppe. Auch jede diskrete Untergruppe (vgl. Aufgabe 1.4.5) $\Gamma \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist eine diskrete Gruppe.

Definition 2.3.7 Eine *Operation* oder *Wirkung* einer topologischen Gruppe G auf einem topologischen Raum X wird gegeben durch eine stetige Abbildung $\Phi: G \times X \to X$,

$$(g, x) \mapsto \Phi(g, x) =: g.x,$$

so dass gilt:

(a) $1.x = x$, für alle $x \in X$;

(b) $(gh).x = g.(h.x)$, für alle $g, h \in G$ und $x \in X$.

Kommentar 2.3.8 (a) Jedes $g \in G$ operiert dann durch einen Homöomorphismus

$$\rho(g): X \to X,\ x \mapsto g.x,$$

denn g^{-1} operiert durch die Umkehrung, weil nach (b) und (a)

$$\rho(g)\rho(g^{-1}) = \rho(gg^{-1}) = \rho(1) = \mathrm{id}_X$$

und damit (nach Anwendung auf g^{-1}) auch $\rho(g^{-1})\rho(g) = \mathrm{id}_X$ ist. Es ist damit

$$\rho: G \to \mathrm{Homoeo}(X),\ g \mapsto \rho(g),$$

$$\mathrm{Homoeo}(X) := \{f: X \to X :\ f \text{ ist Homöomorphismus}\},$$

ein Gruppenhomorphismus (wo $\mathrm{Homoeo}(X)$ natürlich die Komposition als Gruppenstruktur trage). Man nennt die Operation *effektiv*, wenn ρ injektiv ist, d.i.: Ist $g \in G$ mit $g.x = x$ für alle $x \in X$, so muss $g = 1$ sein. In diesem Fall kann man G (als Gruppe) mit der Untergruppe $\rho(G) \subseteq \mathrm{Homoeo}(X)$ identifizieren. Man spricht dann von einer *topologischen Transformationsgruppe*.

(b) Hält man $x \in X$ fest und lässt $g \in G$ laufen, so erhält man die *Bahn* Gx von x unter G,

$$Gx = \{g.x \in X : \ g \in G\}.$$

Besteht X nur aus einer Bahn, also $Gx = X$ für ein (und dann jedes) $x \in X$, so sagt man, dass G *transitiv* operiert. Es gibt dann also zu beliebigen $x, y \in X$ stets ein $g \in G$ mit $g.x = y$.

(c) Für jedes $x \in X$ nennt man die Untergruppe (siehe Aufgabe 2.4.38)

$$G_x := \{g \in G : \ g.x = x\}$$

die *Standgruppe* (oder *Isotropiegruppe*) von x. Gilt für jedes $g \in G$ mit $g \neq 1$, dass $g.x \neq x$ ist, für alle $x \in X$, also $G_x = (1)$ für alle $x \in X$, so sagt man, dass G *(fixpunkt-) frei* auf X operiert.

(d) Definiert man $x \sim y$ auf X, wenn x und y in der gleichen Bahn liegen, so erhält man eine Äquivalenzrelation (siehe Aufgabe 2.4.38). Der Quotientenraum (mit der Quotiententopologie natürlich) heißt der *Bahnenraum* von X unter G und wird mit X/G bezeichnet.

Beispiel 2.3.9 (a) Sei $G = \mathrm{O}(n+1)$ und $X = \mathbb{R}^{n+1}$. Dann operiert G auf X durch lineare Transformationen (man spricht dann auch von einer *Darstellung* der Gruppe G) vermöge

$$g.x = gx,$$

wobei wir auf der rechten Seite dieser Gleichung die übliche Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor verstehen. Für $x = 0$ ist $G_x = G$, d.h.: $x = 0$ ist ein *Fixpunkt*. Für $x = (0, \ldots, 0, 1)$ ist

$$G_x = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ A \in \mathrm{O}(n) \right\} \cong \mathrm{O}(n).$$

Es ist dann $Gx = \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Die (eingeschränkte) Operation von G auf $\mathbb{S}^n$ ist also transitiv.

(b) Die diskrete Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiere auf $X = \mathbb{R}^n$ durch Translationen wie folgt:

$$\gamma.x = x + \gamma,$$

für $\gamma \in \Gamma$ und $x \in X$. In diesem Fall ist die Operation frei, $\Gamma_x = (1)$ für alle $x \in X$, und es gilt für den Bahnenraum X/Γ (vgl. die Aufgaben 2.4.39 und 2.4.42):

$$X/\Gamma \cong \mathbb{T}^n.$$

Definition 2.3.10 Sei Γ eine topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Eine Wirkung von Γ auf X heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, so dass für je zwei Elemente $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$ gilt:

$$\gamma_1(U) \cap \gamma_2(U) = \emptyset$$

(siehe Abbildung 2.29).

Abbildung 2.29: eine eigentlich diskontinuierliche Wirkung

Kommentar 2.3.11 (a) Hier bezeichnen wir mit $\gamma(U)$ die Menge

$$\gamma(U) = \{\gamma.x \in X : \ x \in U\}.$$

(b) Operiert Γ eigentlich diskontinuierlich auf X, so operiert Γ notwendig frei und Γ trägt die diskrete Topologie, denn jede Bahn $\Gamma x \subseteq X$ ist diskret und die *Bahnabbildung* $\Gamma \to \Gamma x \subseteq X$, $\gamma \mapsto \gamma.x$, ist stetig und bijektiv (sogar ein Homöomorphismus), vgl. Aufgabe 2.4.41.

(c) Operiert eine topologische Gruppe G auf einem topologischen Raum X, so notieren wir im Folgenden für jedes $g \in G$ den von ihm induzierten Homöomorphismus $\rho(g)$ (vgl. 2.3.8.(a)) selbst mit g und unterdrücken also ρ.

Bemerkung 2.3.12 *Sei $\tilde{X}$ ein zusammenhängender Raum, Γ eine diskrete Gruppe und Γ operiere eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{X}$. Dann ist der Bahnenraum $X := \tilde{X}/\Gamma$ zusammenhängend und die kanonische Projektion $\pi\colon \tilde{X} \to X$, $\tilde{x} \mapsto \Gamma\tilde{x} = [\tilde{x}]$ eine Überlagerung.*

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig, $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, also $x = \Gamma\tilde{x} = [\tilde{x}]$. Wähle nun eine Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$ (die man auch nach evtl. Verkleinerung als offen annehmen darf), so dass $\gamma_1(\tilde{U}) \cap \gamma_2(\tilde{U}) = \emptyset$ ist, für $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Dann gilt für $U := \pi(\tilde{U}) \subseteq X$:

$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\tilde{U}),$$

und $\pi|\tilde{U} \colon \tilde{U} \to U$ ist stetig, bijektiv und auch offen, denn

$$\pi^{-1}(\pi(\tilde{V})) = \bigcup_{\gamma} \gamma(\tilde{V}) \subseteq \tilde{X}$$

ist offen, wenn $\tilde{V} \subseteq \tilde{X}$ offen ist, da alle $\gamma \colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ Homöomorphismen sind. (Insbesondere ist $U \subseteq X$ offen.) Aus diesem Grund ist auch $\pi|\gamma(\tilde{U}) \colon \gamma(\tilde{U}) \to U$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ ein Homöomorphismus, denn

$$\pi|\gamma(\tilde{U}) = (\pi|\tilde{U}) \circ (\gamma^{-1}|\gamma(\tilde{U})).$$

Also ist π tatsächlich eine Überlagerung. □

Beispiel 2.3.13 (a) $\mathbb{Z}$ operiert auf $\mathbb{R}$ durch Translationen (vgl. Beispiel 2.3.9.(b)),

$$n.x = x + n$$

($n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$), eigentlich diskontinuierlich (siehe Aufgabe 2.4.42). Der Bahnenraum $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist homöomorph zu $\mathbb{S}^1$ vermöge $\bar{\mathrm{ex}} \colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ (vgl. Aufgabe 2.4.39 und Diagramm 2.30).

Abbildung 2.30: die Kreislinie als Bahnenraum

(b) $\mathbb{Z}^n$ operiert auf $\mathbb{R}^n$ eigentlich diskontinuierlich durch Translationen (vgl. Beispiel 2.3.9 und Aufgabe 2.4.42), $\gamma.x = x + \gamma$ ($\gamma \in \mathbb{Z}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$). Es ist dann

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{T}^n.$$

(c) $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$ operiert auf $\mathbb{S}^n$ (für jedes $n \in \mathbb{N}_0$) durch Punktspiegelung

$$\pm 1.x = \pm x$$

($x \in \mathbb{S}^n$) eigentlich diskontinuierlich (siehe Aufgabe 2.4.44) und der Bahnenraum $\mathbb{S}^n/\{\pm 1\}$ ist homoöomorph zu $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Es ist auch

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{R}^*,$$

wo $\mathbb{R}^*$ durch *Homothetien* auf $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{R}^*$ operiert, $\lambda.x = \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$, $x \in X$), siehe Aufgabe 2.4.44.

(d) Sei $p \in \mathbb{N}$. Dann operiert $\Gamma = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \{\omega \in \mathbb{C} : \omega^p = 1\}$ für jedes teilerfremde $q \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq q < p$ auf $X = \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ durch

$$\omega.(z_1, z_2) = (\omega z_1, \omega^q z_2)$$

eigentlich diskontinuierlich (siehe Aufgabe 2.4.46). Der Quotient

$$\mathbb{L}(p, q) := \mathbb{S}^3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

heißt der *Linsenraum* vom Typ (p, q).

Definition 2.3.14 Sei $\pi\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Ist Y ein topologischer Raum und $f\colon Y \to X$ stetig, so heißt jede stetige Abbildung $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ mit $\pi \circ \tilde{f} = f$ ein *Lift* von f.

Abbildung 2.31: der Lift einer Abbildung

Kommentar 2.3.15 (a) Ist $Y = [0, 1]$ und $f = \alpha\colon I \to X$ ein Weg, so spricht man bei $\tilde{\alpha}\colon I \to \tilde{X}$ mit $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ von einem *gelifteten Weg*.

Abbildung 2.32: Wegeliftung über $\pi = \mathrm{ex}$

(b) Ist $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig und $\alpha = f \circ \mathrm{ex}\colon I \to X$, so existiert nach Lemma 2.1.12 ein Lift $\varphi = \tilde{\alpha}$ bzgl. $\pi = \mathrm{ex}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ (und $\tilde{\alpha}$ ist eindeutig festgelegt durch $\tilde{\alpha}(0) = 0$). Das zeigt bereits: Während α geschlossen ist, braucht $\tilde{\alpha}$ dies nicht zu sein.

Lemma 2.3.16 *Ist $\pi\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $f\colon Y \to X$ stetig, Y zusammenhängend und sind $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\colon Y \to \tilde{X}$ Lifts von f mit $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$ für ein $y_0 \in Y$, so ist bereits $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

Beweis. Sei $y \in Y$ beliebig, $x := f(y) \in X$ und $U \subseteq X$ eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von x. Seien dann $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subseteq \tilde{X}$ die Blätter über U, die $\tilde{f}_1(y)$ bzw. $\tilde{f}_2(y)$ enthalten. Setze nun

$$V := \tilde{f}_1^{-1}(\tilde{U}_1) \cap \tilde{f}_2^{-1}(\tilde{U}_2).$$

Dann ist $V \subseteq Y$ eine offene Umgebung von y und es gilt

$$\tilde{f}_1|V = (\pi|\tilde{U}_1)^{-1} \circ f, \quad \tilde{f}_2|V = (\pi|\tilde{U}_2)^{-1} \circ f,$$

denn $\mathrm{im}(\tilde{f}_1|V) \subseteq \tilde{U}_1$ und $\pi|\tilde{U}_1$ ist umkehrbar (und genau so für $\tilde{f}_2|V$).

1. Fall: $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$ (also $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$): Dann ist

$$\tilde{f}_1(z) = (\pi|\tilde{U}_1)^{-1} \circ f(z) = \tilde{f}_2(z),$$

für alle $z \in V$.

2. Fall: $\tilde{U}_1 \neq \tilde{U}_2$ (also $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$): Dann ist

$$\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z),$$

Abbildung 2.33: zur Eindeutigkeit eines Lifts

Abbildung 2.34: der Lift eines Weges

für alle $z \in V$. Damit ist aber dann

$$M := \{y \in Y : \ \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$$

offen, abgeschlossen und nicht leer (da $y_0 \in M$ ist). Weil Y zusammenhängend ist, muss $M = Y$ und damit $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ sein. □

Lemma 2.3.17 *(Liftung von Wegen). Sei $\pi\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $\alpha\colon I \to X$ ein Weg mit $\alpha(0) = x_0$. Zu jedem $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0) \subseteq \tilde{X}$ existiert dann genau ein Lift $\tilde{\alpha}\colon I \to \tilde{X}$ von α mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.*

Beweis (vgl. den Beweis von Lemma 2.1.12 für den Spezialfall $\pi = \mathrm{ex}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$). Die Eindeutigkeit des gesuchten Lifts folgt sofort aus Lemma 2.3.16.

Existenz: Da π eine Überlagerung ist, gibt es eine offene Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ von X, die aus gleichmäßig überlagerten offenen Mengen besteht (wähle etwa als Indexmenge $J = X$). Dann ist auch $(\alpha^{-1}(U_j))$ eine offene Überdeckung von $I = [0, 1]$. Wählen wir für diese nun eine Lebesgue-Zahl

$\lambda > 0$ (vgl. Aufgabe 2.4.31), so sehen wir, dass es eine Unterteilung $0 = t_1 < \cdots < t_k = 1$ von I gibt ($k \in \mathbb{N}$) und für jedes $i = 1, \ldots, k$ ein $j(i) \in J$ gibt, so dass gilt:

$$\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_{j(i)},$$

$i = 1, \ldots, k$. (Wähle etwa das Maximum der Intervallbreiten kleiner als λ. Wir setzen nun $U_i := U_{j(i)}$.) Nun setzen wir $\tilde{\alpha}_1 \colon [t_0, t_1] \to \tilde{X}$,

$$\tilde{\alpha}_1 := (\pi|\tilde{U}_1)^{-1} \circ (\alpha|[t_0, t_1]),$$

wobei $\tilde{U}_1$ das Blatt über U_1 ist, welches $\tilde{x}_0$ über $x_0 = \alpha(0)$ enthält, $\tilde{\alpha}_1(0) = \tilde{x}_0$. Sei nun $\tilde{U}_2$ das Blatt über U_2, welches $\tilde{\alpha}_1(t_1)$ über $\alpha(t_1)$ enthält. Setze dann $\tilde{\alpha}_2 \colon [t_1, t_2] \to \tilde{X}$,

$$\tilde{\alpha}_2 := (\pi|\tilde{U}_2)^{-1} \circ (\alpha|[t_1, t_2]),$$

usw. induktiv

$$\tilde{\alpha}_i = (\pi|\tilde{U}_i)^{-1}) \circ (\alpha([t_{i-1}, t_i]),$$

$i = 1, \ldots, k$. Weil jeweils $\tilde{\alpha}_i(t_i) = \tilde{\alpha}_{i+1}(t_i)$ für $i = 1, \ldots, k-1$ ist, setzen sich $\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_k$ zu einem stetigen $\tilde{\alpha} \colon I \to \tilde{X}$ zusammen, welcher nach Konstruktion dann der gesuchte Lift von α ist. □

Lemma 2.3.18 *Sei $\pi \colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $\alpha, \beta \colon I \to X$ zwei Wege in X mit gleichen Endpunkten, $\alpha(0) = \beta(0) =: x_0$ und $\alpha(1) = \beta(1) =: x_1$, die homotop relativ $\{0, 1\}$ sind. Ist nun $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ und sind $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \colon I \to \tilde{X}$ die (nach Lemma 2.3.17 eindeutig bestimmten) Lifts von α bzw. β mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = \tilde{x}_0$, so sind auch $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ homotop relativ $\{0, 1\}$, insbesondere ist $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.*

Beweis (vgl. den Beweis von Proposition 2.1.17 für den Spezialfall von $\pi = \mathrm{ex}$). Sei $H \colon I \times I \to X$ eine Homotopie zwischen α und β mit festen Endpunkten. Wir konstruieren einen Lift $\tilde{H} \colon I \times I \to \tilde{X}$ von H, $\pi \circ \tilde{H} = H$, mit $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}_0$.

Dann ist für alle $s \in I$

$$\pi \circ \tilde{H}(0, s) = H(0, s) = x_0 \text{ und } \pi \circ \tilde{H}(1, s) = H(1, s) = x_1.$$

Weil $\pi^{-1}(x_0)$ bzw. $\pi^{-1}(x_1)$ diskret ist, müssen dann $s \mapsto \tilde{H}(0, s)$ bzw. $s \mapsto \tilde{H}(1, s)$ konstant sein,

$$\tilde{H}(0, s) = \tilde{x}_0 \text{ und } \tilde{H}(1, s) =: \tilde{x}_1.$$

$\tilde{H}$ ist dann Homotopie rel. $\{0, 1\}$ zwischen $t \mapsto \tilde{H}(t, 0)$ und $t \mapsto \tilde{H}(t, 1)$. Das müssen aber, da sie Lifts von α bzw. β mit Anfang $\tilde{x}_0$ sind, wegen der Eindeutigkeit des Lifts, gerade $\tilde{\alpha}$ bzw. $\tilde{\beta}$ sein. Insbesondere ist dann also

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{x}_1 = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{\beta}(1).$$

Existenz von $\tilde{H}$: Ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.3.17 konstruieren wir zunächst eine Zerlegung $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ von I, so dass für jedes Rechteck $V_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ mit $1 \leq i, j \leq k$ gilt:

$$H(V_{ij}) \subseteq U_{ij},$$

für eine gleichmäßig überlagerte, offene Teilmenge U_{ij} von X. (Man wähle wieder zunächst eine offene Überdeckung von X aus gleichmäßig überlagerten Mengen, ziehe sie mittels H auf das kompakte $I \times I$ zurück, wähle eine Lebesgue-Zahl für diese Überdeckung und wähle schließlich $k \in \mathbb{N}$ so groß dass der Durchmesser von V_{ij} kleiner als λ ist $(i, j = 1, \ldots, k)$.) Sei nun $\tilde{U}_{00}$ das Blatt über U_{00}, welches $\tilde{x}_0$ enthält. Wir setzen dann

$$\tilde{H}_{00} := (\pi|\tilde{U}_{00})^{-1} \circ (H|V_{00})$$

auf V_{00}. Dann notieren wir $\tilde{x}_{10} := \tilde{H}_{00}(t_1, t_0)$ und nennen $\tilde{U}_{10}$ das Blatt über U_{10}, welches $\tilde{x}_{10}$ enthält und setzen

$$\tilde{H}_{10} := (\pi|\tilde{U}_{10})^{-1} \circ (H|V_{10}).$$

Wegen der eindeutigen Liftbarkeit des Weges $s \mapsto H(t_1, s)$ müssen nun $\tilde{H}_{00}$ und $\tilde{H}_{10}$ auf $\{t_1\} \times [t_0, t_1]$ übereinstimmen und setzen sich daher wohldefiniert zu einer stetigen Abbildung $\tilde{H}$ auf $V_{00} \cup V_{10}$ zusammen. Dieses Verfahren setzt man nun auf V_{20} (und nach k Schritten auf V_{01}) usw. fort und man erhält den gesuchten Lift H auf ganz $I \times I$. $\square$

Kommentar 2.3.19 (a) Das *Liftungsproblem* für $Y = [0, 1]$ und $Y = [0, 1]^2$ ist wegen Lemma 2.3.17 und Lemma 2.3.18 damit gelöst.

(b) Schon hier ist klar, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ (eines wegzusammenhängenden Raumes X) Einfluss auf die Existenz von Überlagerungen $\pi\colon \tilde{X} \to X$ von X hat. Wir fixieren im Folgenden häufig ein Punktepaar $(x_0, \tilde{x}_0)$ mit $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$ und schreiben dann für eine Überlagerung (zwischen punktierten Räumen) $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$. Ist nämlich etwa $\pi_1(X, x_0) = (1)$, so gilt für einen Weg $\tilde{\alpha}$ von $\tilde{x}_0$ zu einem (evtl. anderen Punkt) $\tilde{x}_0' \in \pi^{-1}(x_0)$, dass $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$ geschlossen, also nullhomotop ist, $\alpha \simeq c_{x_0}$. Aber dann ist $\tilde{\alpha}$, als Lift von α, auch nullhomotop, $\tilde{\alpha} \simeq c_{\tilde{x}_0}$, insbesondere ist

$$\tilde{x}_0' = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0.$$

Es gibt also keine nicht-triviale Überlagerung von X (vgl. Aufgabe 2.4.48).

(c) Sei nun Y wegzusammenhängend, $y_0 \in Y$, $f\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ stetig und $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Eine offenbar notwendige Bedingung für die Existenz eines Liftes $\tilde{f}\colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ von $f\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$, $\pi \circ \tilde{f} = f$, ist nun wegen
$$\pi_1(\pi) \circ \pi_1(\tilde{f}) = \pi_1(f),$$
dass für $\pi_* = \pi_1(\pi)$ und $f_* = \pi_1(f)$ gilt:
$$\operatorname{im}(f_*) \subseteq \operatorname{im}(\pi_*) \quad (\text{in } \pi_1(X, x_0)).$$

(d) Für einfach zusammenhängende Räume Y wie I oder I^2 ist diese Bedingung trivialer Weise erfüllt, $\pi_1(Y, y_0) = (1)$.

Abbildung 2.35: das Liftungsproblem

Satz 2.3.20 *(Liftungssatz). Sei $\pi\colon (\tilde{X}, x_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung und Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Genau dann hat eine stetige Abbildung $f\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$ einen Lift $\tilde{f}\colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, wenn gilt:*
$$\operatorname{im}(f_*) \subseteq \operatorname{im}(\pi_*).$$

Beweis „$\Rightarrow$“: Dies haben wir soeben (siehe Kommentar 2.3.19.(c)) gesehen.

„$\Leftarrow$“: Sei $y \in Y$ beliebig. Da Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, ist Y nach 1.3.11 auch wegzusammenhängend. Wir wählen einen Weg w in Y von y_0 nach y und setzen $\alpha := f \circ w$. Sei dann $\tilde{\alpha}$ der (eindeutig bestimmte) Lift von α mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. Wir setzen $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$,
$$\tilde{f}(y) = \tilde{\alpha}(1).$$

Wohldefiniertheit von $\tilde{f}$: Wir meinen hiermit, dass die Definition nicht von der Wahl des verbindenden Weges w von y_0 nach y abhängt. Sei dazu v ein weiterer solcher Weg. Dann ist $v * w^{-1}$ geschlossen (mit Aufpunkt y_0). Wegen

$$f_*([v * w^{-1}]) \in \operatorname{im}(\pi_*)$$

existiert nun ein geschlossener Weg $\tilde{u}$ in $\tilde{X}$ mit Aufpunkt $\tilde{x}_0$, so dass $f_*([v * w^{-1}]) = \pi_*([\tilde{u}])$, also

$$(f \circ v) * (f \circ w^{-1}) \simeq \pi \circ \tilde{u}$$

ist. Wir setzen $\beta := f \circ v$ und erhalten nach Multiplikation mit $f * w$ (und den üblichen Homotopieargumenten wie in 2.2.6) von rechts:

$$\beta \simeq (\pi \circ \tilde{u}) * (f \circ w) \text{ rel } \{0, 1\}.$$

Ist $\tilde{\alpha}$ der Lift von $\alpha := f \circ w$ und $\tilde{\beta}$ der Lift von β, so ist $\tilde{u} * \tilde{\alpha}$ der Lift von $\pi \circ \tilde{u} * (f \circ w) = u * \alpha$ mit $u := \pi \circ \tilde{u}$, also nach 2.3.18

$$\tilde{\beta} \simeq \tilde{u} * \tilde{\alpha} \text{ rel } \{0, 1\},$$

insbesondere

$$\tilde{\beta}(1) = \tilde{u} * \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(1),$$

also $\tilde{f}$ wohldefiniert.

Abbildung 2.36: zum Beweis des Liftungssatzes

Nach Konstruktion ist

$$\pi \circ f(y) = \pi \circ \tilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = f \circ w(1) = f(y)$$

und $f(y_0) = \tilde{x}_0$ (weil man hier den konstanten Weg $w = c_{y_0}$ wählen kann). Es bleibt die Stetigkeit von $\tilde{f}$ zu zeigen.

Stetigkeit von $\tilde{f}$: Sei dazu nun $y \in Y$ beliebig, $x = f(y)$ und $U \subseteq X$ eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von x. Sei weiter $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ das Blatt über U, welches $\tilde{x} = \tilde{f}(y)$ enthält. Da $f^{-1}(U) \subseteq Y$ offen ist, können wir nun eine wegzusammenhängende, offene Umgebung $V \subseteq Y$ von y wählen, die in $f^{-1}(U)$ liegt (weil Y lokal wegzusammenhängend ist).

Behauptung: $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$.

Das reicht um die Stetigkeit von $\tilde{f}$ in y zu zeigen, denn ist $S \in \mathcal{U}(\tilde{x})$ eine beliebige Umgebung, so kann man $U \in \mathcal{U}(x)$ evtl. so verkleinern, dass $\tilde{U} \subseteq S$ ist. Aber dann ist mit der Behauptung $V \subseteq \tilde{f}^{-1}(S)$, also auch $\tilde{f}^{-1}(S)$ eine Umgebung von y.

Ist also nun $z \in V$ und w ein Weg von y nach z in V, so ist für $\beta := f \circ w$ gerade $\tilde{\beta} = (\pi|\tilde{U})^{-1} \circ \beta$ der Lift von β mit $\tilde{\beta}(0) = \tilde{x}$. Für einen Weg v von y_0 nach y und $\alpha = (f \circ v) * (f \circ w)$ ist dann ebenso $\widetilde{\alpha} = \widetilde{(f \circ v)} * \tilde{\beta}$ der Lift von α mit $\alpha(0) = \tilde{x}_0$. Es folgt:

$$f(z) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) \in \tilde{U}.$$

$\square$

Abbildung 2.37: zur Stetigkeit des Lifts

Kommentar 2.3.21 (a) Um den Liftungssatz 2.3.20 im Folgenden anwenden zu können (z.B. auf $Y = X$ selbst), nehmen wir ab sofort an, dass X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist. Dann ist für eine Überlagerung $\pi: \tilde{X} \to X$ auch $\tilde{X}$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend (π ist ja ein lokaler Homöomorphismus) und damit X und $\tilde{X}$ auch wegzusammenhängend. (Bisher waren beide lediglich zusammenhängend (vgl. 2.3.1).)

(b) Für das Liftungsverhalten bzgl. einer Überlagerung $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ spielt also nun die Untergruppe

$$H = \operatorname{im}(\pi_*) \subseteq \pi_1(X, x_0) =: G$$

eine entscheidende Rolle. Wir nennen sie die *charakteristische Untergruppe* von π.

Bemerkung 2.3.22 *Sei $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist $\pi_*\colon \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ injektiv.*

Beweis. Sei $\tilde{\alpha}$ geschlossen in $\tilde{X}$ (mit Aufpunkt $\tilde{x}_0$), so dass $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$ homotop zum konstanten Weg c_{x_0} ist, $\alpha \simeq c_{x_0}$, also $[\tilde{\alpha}]$ ein Kernelement von π_*. Weil $\tilde{\alpha}$ und $c_{\tilde{x}_0}$ die Lifts von α bzw. c_{x_0} mit Anfang $\tilde{x}_0$ sind, gilt nach Lemma 2.3.18, dass auch $\tilde{\alpha} \simeq c_{\tilde{x}_0}$ ist, also $[\tilde{\alpha}] = 1$ und damit π_* injektiv. $\square$

Kommentar 2.3.23 (a) Ist $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, so ist ihre charakteristische Untergruppe $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ also (vermöge π_*) isomorph zu $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

(b) Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so erinnern wir an den Begriff des *Indexes* von H in G als die Anzahl (d.i. die Kardinalität) der Linksnebenklassen von H in G,

$$[G : H] := \operatorname{card}(G/H).$$

Sie ist gleich der Anzahl der Rechtsnebenklassen von H in G, weil die bijektive Abbildung $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, Linksnebenklassen in Rechtsnebenklassen überführt und umgekehrt (vgl. Aufgabe 2.4.49).

Bemerkung 2.3.24 *Sei $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$. Dann ist die Blätterzahl von π gleich dem Index von H in $\pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Wir wählen ein *vollständiges Repräsentantensystem* $([\alpha_i])_{i \in I}$ der Rechtsnebenklassen von H in $G := \pi_1(X, x_0)$ (und wählen für jeden Repräsentanten von $Hg \subseteq G$ natürlich einen Repräsentanten α_i, $i \in I$). Dann ist also

$$G = \dot{\bigcup}_{i \in I} H[\alpha_i]$$

und

$$[G : H] = \operatorname{card}(I).$$

Wir setzen nun $\Phi\colon I \to \pi^{-1}(x_0)$,

$$\Phi(i) = \tilde{\alpha}_i(1),$$

wo $\tilde{\alpha}_i$ der Lift von α mit Anfang $\tilde{x}_0$ ist. Wir behaupten, dass Φ bijektiv ist und damit dann die Behauptung der Bemerkung, da die Blätterzahl von π gerade die Kardinalität von $\pi^{-1}(x_0)$ ist.

Wohldefniertheit von Φ: Damit meinen wir, dass Φ nicht von der Auswahl der Repräsentanten $[\alpha_i]$ (und auch nicht von der Auswahl der Repräsentanten α_i) abhängt. Ist nämlich $[\beta_i]$ ein anderer Repräsentant von $H[\alpha_i]$, so ist $[\beta_i] = [u][\alpha_i]$ mit einem $[u] \in H$ und daher $u = \pi \circ \tilde{u}$ mit einem geschlossenen $\tilde{u}$ in $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Es ist dann $\tilde{u}$ der Lift von u zum Anfang $\tilde{x}_0$. Wir erhalten wegen $\beta_i \simeq u * \alpha_i$ wieder wegen Lemma 2.3.18

$$\tilde{\beta}_i \simeq \tilde{u} * \tilde{\alpha}_i,$$

insbesondere

$$\tilde{\beta}_i(1) = \tilde{\alpha}_i(1).$$

Injektivität von Φ: Seien also $i, j \in I$ mit $\Phi(i) = \Phi(j)$ und damit $\tilde{\alpha}_i(1) = \tilde{\alpha}_j(1)$. Dann ist $\tilde{u} := \tilde{\alpha}_i * \tilde{\alpha}_j^{-1}$ geschlossen in $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und damit

$$[\alpha_i][\alpha_j]^{-1} = [\alpha_i * \alpha_j^{-1}] = \pi_*([\tilde{\alpha}_i * \tilde{\alpha}_j^{-1}]) = \pi_*([\tilde{u}]) \in H.$$

Es folgt $H[\alpha_i] \subseteq H[\alpha_j]$ und durch Austausch der Rollen von i und j auch $H[\alpha_j] \subseteq H[\alpha_i]$. Es ist also $H[\alpha_i] = H[\alpha_j]$ und deshalb $i = j$.

Surjektivität von Φ: Sei $\tilde{x}_0' \in \pi^{-1}(x_0)$ beliebig. Wir wählen einen Weg $\tilde{\beta}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_0'$. Dann ist $\tilde{\beta}$ der Lift von $\beta := \pi \circ \tilde{\beta}$. Es gibt nun ein $i \in I$, so dass $H[\alpha_i] = H[\beta]$ ist. Wegen der Wohldefiniertheit von Φ schließen wir deshalb

$$\tilde{x}_0' = \tilde{\beta}(1) = \tilde{\alpha}_i(1) = \Phi(i)$$

und damit die Surjektivität von Φ. □

Kommentar 2.3.25 Ist also (X, x_0) einfach zusammenhängend, so sehen wir hier erneut (vgl. Kommentar 2.3.19.(b)), dass (X, x_0) (im Wesentlichen) nur eine Überlagerung hat, nämlich die Identität (vgl. Aufgabe 2.4.48), weil eine 1-blättrige Überlagerung notwendig ein Homöomorphismus ist.

Definition 2.3.26 Seien $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $\pi'\colon (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ Überlagerungen.

Abbildung 2.38: ein Überlagerungsmorphismus

(a) Eine stetige Abbildung $f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ heißt ein *Überlagerungsmorphismus* über (X, x_0), wenn $\pi' \circ f = \pi$ ist (vgl. Diagramm 2.38).

(b) Ein Überlagerungsmorphismus $f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ heißt ein *Isomorphismus*, wenn es einen (Überlagerungs-) Morphismus $g\colon (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ gibt mit
$$g \circ f = \mathrm{id} \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}.$$
π und π' heißen dann *äquivalent*.

Kommentar 2.3.27 (a) Jeder Überlagerungsmorphismus f ist selbst eine Überlagerung (siehe Aufgabe 2.4.50).

(b) Für ein festes Objekt (X, x_0) in $\mathbf{Top}_0$ (zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend) bilden offenbar die Überlagerungen $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ die Objekte und die Überlagerungsmorphismen die Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}_{(X,x_0)}$ (vgl. Aufgabe 2.4.47).

(c) Ein Morphismus f zwischen zwei Überlagerungen π und π' ist offenbar ein Lift von π bzgl. π'. Wegen $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0'$ gibt es deshalb nach Lemma 2.3.16 höchtens einen (vgl. Aufgabe 2.4.47).

(d) Auf Grund des Liftungssatzes 2.3.20 gibt es diesen Morphismus, genau wenn
$$\mathrm{im}(\pi_*) \subseteq \mathrm{im}(\pi'_*)$$
ist.

Proposition 2.3.28 *Sei (X, x_0) ein punktierter, zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Dann sind zwei Über-*

lagerungen $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *und* $\pi'\colon (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ *genau dann äquivalent, wenn ihre charakteristischen Untergruppen* $H, H' \subseteq \pi_1(X, x_0)$ *übereinstimmen,* $H = H'$*.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Das ist klar, denn aus der Existenz eines Morphismus' $f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ von π nach π' folgt $H \subseteq H'$ und aus der Existenz eines $g\colon (\tilde{X}', \tilde{x}_0') \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ von π' nach π folgt $H' \subseteq H$.

„$\Leftarrow$“: Auch das ist klar, denn aus $H \subseteq H'$ folgt die Existenz eines Morphismus' $f\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ von π nach π' nach Satz 2.3.20 und aus $H' \subseteq H$ folgt ebenso die Existenz eines Morphismus' g von π' nach π. Die Kompositionen $g \circ f$ und $f \circ g$ müssen dann wegen Lemma 2.3.16 die Identität sein. $\square$.

Motivation 2.3.29 (a) Sei (X, x_0) gegeben. Welche Untergruppen $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ tauchen als Bild $\mathrm{im}(\pi_*)$ für eine Überlagerung $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ auf?

(b) Wie hängt $H = \mathrm{im}(\pi_*)$ vom Basispunkt $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ ab?

Erinnerung 2.3.30 Sei G eine Gruppe. Dann nennt man zwei Untergruppen $H, H' \subseteq G$ *konjugiert* zueinander, wenn es ein $g_0 \in G$ gibt, so dass gilt:

$$H' = g_0 H g_0^{-1}.$$

H und H' sind dann als abstrakte Gruppen insbesondere isomorph, denn der Gruppenisomorphismus $\varphi\colon G \to G$, $g \mapsto g_0 g g_0^{-1}$ bildet gerade H nach H' ab.

Proposition 2.3.31 *Sei* $\pi\colon \tilde{X} \to X$ *eine Überlagerung und* $x_0 \in X$*.*

(a) Sind $\tilde{x}_0, \tilde{x}_0' \in \pi^{-1}(x_0)$*, so gilt für die charakteristischen Untergruppen* $H, H' \subseteq \pi_1(X, x_0)$ *von* $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *und* $\pi'\colon (\tilde{X}_0, \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$*, dass sie konjugiert zueinander sind. (Hier ist die Abbildung* π' *die Gleiche wie* π*. Wir notieren sie nur deshalb mit einem Strich, weil wir nun den Basispunkt von* $\tilde{X}$ *geändert haben.)*

(b) Sei $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$*,* $H \subseteq \pi_1(X, x_0) =: G$ *die charakteristische Untergruppe von* $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *und* $H' \subseteq G$ *konjugiert zu* H*. Dann existiert ein* $\tilde{x}_0' \in \pi^{-1}(x_0)$*, so dass* H' *charakteristisch für* $\pi'\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ *ist.*

Beweis. (a) Sei $\tilde{\alpha}$ ein Weg in $\tilde{X}$ von $\tilde{x}_0'$ nach $\tilde{x}_0$. Dann ist nach Bemerkung 2.2.8 $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0')$,

$$[\tilde{\beta}] \mapsto [\tilde{\alpha} * \tilde{\beta} * \tilde{\alpha}^{-1}],$$

ein Isomorphismus. Es folgt

$$\begin{aligned} H' &= \pi'_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)) = [\alpha]\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)[\alpha^{-1}] \\ &= [\alpha]H[\alpha]^{-1} \end{aligned}$$

mit $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$.

(b) Sei $H = \mathrm{im}(\pi_*)$ und $H' = [\alpha]H[\alpha]^{-1}$ für einen geschlossenen Weg α in (X, x_0). Wir setzen dann $\beta := \alpha^{-1}$ und $\tilde{x}'_0 := \tilde{\beta}(1)$, wo $\tilde{\beta}$ der Lift von β mit Anfang $\tilde{x}_0$ ist. Dann gilt nach Teil (a):

$$\mathrm{im}(\pi'_*) = [\alpha]H[\alpha]^{-1} = H'.$$

$\square$

Kommentar 2.3.32 (a) Betrachtet man also eine Überlagerung $\pi: \tilde{X} \to X$ ohne Basispunkte, so bekommt man für jede Wahl $x_0 \in X$ eine ganze Konjugationsklasse von Untergruppen in $G := \pi_1(X, x_0)$, nämlich

$$\{\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq G : \ \tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)\}.$$

Sie heißt die *charakteristische Konjugationsklasse* von π (bzgl. $x_0 \in X$).

(b) Besondere Beachtung verdienen sicher die Überlagerungen, wo die charakteristische Konjugationsklasse 1-elementig ist, d.h. die charakteristische Untergruppe $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ nicht von der Wahl des Faserelementes $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ abhängt.

Definition 2.3.33 Eine Überlagerung $\pi: \tilde{X} \to X$ heißt *regulär* (oder *normal* oder *galoissch*), wenn für eine (und dann jede) Wahl von $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ gilt, dass die charakteristische Untergruppe H von $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ ein Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$ ist.

Definition 2.3.34 Sei $\pi: \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Eine *Decktransformation* $f: \tilde{X} \to \tilde{X}$ ist ein Überlagerungsmorphismus von π auf sich, $\pi \circ f = \pi$, so dass es einen Überlagerungsmorphismus $g: \tilde{X} \to \tilde{X}$ mit

$$g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$$

gibt.

Kommentar 2.3.35 (a) Die Menge der Decktransformationen wird mit $\mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$ bezeichnet und ist offenbar eine Untergruppe der Homöomorphismengruppe $\mathrm{Homoeo}(\tilde{X})$ von $\tilde{X}$,

$$\mathrm{Deck}(\tilde{X}, X) \subseteq \mathrm{Homoeo}(\tilde{X}).$$

Sie heißt die *Decktransformationsgruppe* von π.

(b) Die Decktransformationsgruppe einer Überlagerung spielt in der Algebraischen Topologie eine ähnliche Rolle wie die Galoisgruppe einer Körpererweiterung $\tilde{K} \supseteq K$ in der Algebra. Die Rolle der regulären Überlagerungen übernehmen dabei die Galoiserweiterungen (in Charakteristik Null).

Bemerkung 2.3.36 *Eine Überlagerung* $\pi\colon \tilde{X} \to X$ *ist genau dann regulär, wenn die Operation der Decktransformationsgruppe* $\Gamma = \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$ *auf einer (und dann jeder) Faser* $F = \pi^{-1}(x_0)$ $(x_0 \in X)$ *transitiv ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Seien $\tilde{x}_0, \tilde{x}_0' \in \pi^{-1}(x_0)$. Für die charakteristischen Untergruppen $H, H' \subseteq \pi_1(X, x_0)$ von $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ bzw. $\pi'\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0') \to (X, x_0)$ gilt nach Voraussetzung $H = H'$. Deshalb existiert nach Satz 2.3.20 ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma.\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0'$.

„$\Leftarrow$“: Das ist nach Satz 2.3.31 auch klar. □

Bemerkung 2.3.37 *Ist* $\Gamma \subseteq \mathrm{Homoeo}(\tilde{X})$ *die Decktransformationsgruppe einer Überlagerung* $\pi\colon \tilde{X} \to X$*, so operiert* Γ *eigentlich diskontinuierlich auf* $\tilde{X}$*.*

Beweis. Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ beliebig und $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Dann muss $\gamma_1(\tilde{x}_0) \neq \gamma_2(\tilde{x}_0)$ nach Lemma 2.3.16 sein, denn jedes $\gamma_j\colon \tilde{X} \to \tilde{X}$ $(j = 1, 2)$ ist ein Lift von π (bzgl. π). Sei nun $x_0 := \pi(\tilde{x}_0)$ und $U \subseteq X$ eine gleichmäßig überlagerte, offene Umgebung von x_0 und o.E. auch wegzusammenhängend. Wir bezeichnen dann mit $\tilde{U}$, $\tilde{U}_1$ und $\tilde{U}_2$ die Blätter über U, die die Punkte $\tilde{x}_0$, $\gamma_1.\tilde{x}_0$ und $\gamma_2.\tilde{x}_0$ respektive enthalten. Es muss nun $\tilde{U}_j = \gamma_j(\tilde{U})$ sein für $j = 1, 2$ (vgl. Aufgabe 2.4.51) und damit gilt

$$\gamma_1(\tilde{U}) \cap \gamma_2(\tilde{U}) = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset.$$

Damit operiert also Γ eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{X}$. □

Proposition 2.3.38 *(a) Sei* $\tilde{X}$ *zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und es operiere* $\Gamma \subseteq \mathrm{Homoeo}(\tilde{X})$ *eigentlich diskontinuierlich. Dann ist die Überlagerung (vgl. Bemerkung 2.3.12)* $\pi\colon \tilde{X} \to \tilde{X}/\Gamma =: X$ *regulär und es gilt:*

$$\Gamma = \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X).$$

(b) Sei $\pi\colon \tilde{X} \to X$ *eine reguläre Überlagerung und* $\Gamma = \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$*. Sei weiter* π' *die Überlagerung* $\tilde{X} \to \tilde{X}/\Gamma$*. Dann existiert ein Homöomorphismus* $\Phi\colon \tilde{X}/\Gamma \to X$ *mit* $\Phi \circ \pi' = \pi$*.*

Beweis (a) Offenbar operiert Γ auf $\tilde{X}$ nach Definition von $\pi\colon \tilde{X} \to \tilde{X}/\Gamma$ durch Decktransformationen und auf jeder Faser transitiv. Es ist also π regulär und $\Gamma \subseteq \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$. Ist umgekehrt $f \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$, so wähle man ein $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$. Dann gibt es ein $\gamma \in \Gamma$, so dass $\gamma(\tilde{x}_0) = f(\tilde{x}_0)$ ist, denn die Faser von $\pi(\tilde{x}_0)$ ist ja gerade die Bahn von $\tilde{x}_0$. Stimmen zwei Decktransformationen aber in einem Punkt überein, so stimmen sie nach Lemma 2.3.16 überhaupt überein, also $f = \gamma$. Es ist also auch $\mathrm{Deck}(\tilde{X}, X) \subseteq \Gamma$.

(b) Da $\pi \circ \gamma = \pi$ ist, existiert (nach der universellen Eigenschaft des Quotienten als Menge) eine Abbildung $\Phi\colon \tilde{X}/\Gamma \to X$ mit $\Phi \circ \pi' = \pi$ und Φ ist stetig (nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie). Weil π surjektiv ist, muss auch Φ surjektiv sein. Weil π regulär ist, muss Φ auch injektiv sein, denn ist $\Phi([\tilde{x}_1]) = \Phi([\tilde{x}_2])$, so ist

$$\pi(\tilde{x}_1) = \Phi \circ \pi'(\tilde{x}_1) = \Phi \circ \pi'(\tilde{x}_2) = \pi(\tilde{x}_2).$$

Dann gibt es aber ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\tilde{x}_2 = \gamma(\tilde{x}_1)$ und damit $[\tilde{x}_1] = [\tilde{x}_2]$. Da schließlich π und π' lokale Homöomorphismen sind, ist dies auch Φ und damit ist Φ dann ein (globaler) Homöomorphismus. □

Bemerkung 2.3.39 *Sei $\pi\colon \tilde{X} \to X$ eine reguläre Überlagerung, $\Gamma = \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$, $x_0 \in X$ und $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ ihre charakteristische Untergruppe. Dann gilt:*

$$\Gamma \cong \pi_1(X, x_0)/H.$$

Beweis. Sei $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ fest. Zu jedem $\gamma \in \Gamma$ wählen wir dann einen Weg $\tilde{\alpha}$ in $\tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\gamma.\tilde{x}_0$ und setzen damit $\Phi\colon \Gamma \to G/H$ mit $G := \pi_1(X, x_0)$ und $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$ so fest:

$$\Phi(\gamma) = H[\alpha]\,(= [\alpha]H).$$

Dann ist Φ zunächst wohldefiniert in dem Sinne, dass es nicht von der Auswahl des Weges $\tilde{\alpha}$ abhängt. Ist nämlich $\tilde{\beta}$ ein anderer (und $\beta = \pi \circ \tilde{\beta}$), so ist $\tilde{u} := \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}^{-1}$ geschlossen und damit $[\alpha] = \pi_*([\tilde{u}])[\beta]$, also $H[\alpha] = H[\beta]$.

Φ ist auch ein Homomorphismus, denn sind $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ und $\tilde{\alpha}_j$ für $j = 1, 2$ wie oben, so ist $\tilde{\alpha}_1 * (\gamma_1 \circ \tilde{\alpha}_2)$ ein Weg von $\tilde{x}_0$ nach $\gamma_1\gamma_2.\tilde{x}_0$. Mit der Wohldefiniertheit folgt deshalb

$$\Phi(\gamma_1\gamma_2) = [\alpha_1][\pi \circ \gamma_1 \circ \tilde{\alpha}_2]H = [\alpha_1][\alpha_2]H = \Phi(\gamma_1)\Phi(\gamma_2).$$

Φ ist injektiv, denn ist $\Phi(\gamma) = 1$ und $\tilde{\alpha}, \alpha$ wie oben, so existiert ein geschlossenes $\tilde{u}$ in $\tilde{X}$ mit $[\alpha] = \pi_*([\tilde{u}])$. Aber dann ist mit Lemma 2.3.18 auch $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{u}$ und damit

$$\gamma.\tilde{x}_0 = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{u}(1) = \tilde{x}_0,$$

also $\gamma = 1$.

Schließlich ist Φ auch surjektiv, denn ist $H[\alpha] \in G/H$ beliebig und $\tilde{\alpha}$ der Lift von α mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$, so existiert wegen der Regularität von π ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma.\tilde{x}_0 = \tilde{\alpha}(1)$. Es folgt: $\Phi(\gamma) = H[\alpha]$. Φ ist also ein Isomorphismus. □

Kommentar 2.3.40 Bemerkung 2.3.39 ergibt die Möglichkeit die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ zu berechnen, wenn $H = (1)$, also $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend, ist, und wenn man die Decktransformationsgruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{Homoeo}(\tilde{X})$ von $\pi\colon \tilde{X} \to X$ kennt:

$$\Gamma = \pi_1(X).$$

Damit folgt nun unmittelbar:

Korollar 2.3.41 *Operiert Γ eigentlich diskontinuierlich auf einem einfach zusammenhängendem (und lokal wegzusamenhängendem) Raum $\tilde{X}$, so gilt für die Fundamentalgruppe von $X = \tilde{X}/\Gamma$:*

$$\pi_1(X) = \Gamma.$$

Beispiel 2.3.42 (a) Da $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\pi_1(\mathbb{R}) = (1)$ ist, folgt erneut:

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

(Man beachte, dass wir hier aber im Grunde denselben Beweis wie in Satz 2.2.10 gegeben haben, denn bei obigem Isomorphismus liften wir zunächst einen geschlossenen Weg $\alpha \in \mathbb{S}^1$ zu $\tilde{\alpha}$ mit - sagen wir - $\tilde{\alpha}(0) = 0$ und betrachten dann die Decktransformation γ, die $0 \in \mathbb{R}$ nach $\tilde{\alpha}(1)$ überführt. Aber das ist nun mal die Translation um $\deg(\alpha) \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$.)

(b) Da $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ (mit $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) und $\pi_1(\mathbb{S}^n) = (1)$ ist für $n \geq 2$, ist

$$\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2 \text{ für } n \geq 2.$$

(c) Für den Linsenraum $\mathbb{L}(p, q) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ (mit $p \geq 2$, $1 \leq q < p$ teilerfremd und $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) ist aus dem gleichen Grund

$$\pi_1(\mathbb{L}(p, q)) = \mathbb{Z}_p.$$

Definition 2.3.43 Ist $\hat{\pi}\colon \hat{X} \to X$ eine Überlagerung und ist $\hat{X}$ einfach zusammenhängend, so nennt man $\hat{\pi}$ *die universelle Überlagerung*.

Kommentar 2.3.44 (a) Ist $x_0 \in X$, $\hat{\pi}\colon \hat{X} \to X$ universell und $\hat{x}_0 \in \hat{\pi}^{-1}(x_0)$, so ist $\hat{\pi}\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ universell in folgendem Sinn: Zu jeder weiteren (punktierten) Überlagerung $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ gibt es genau einen Überlagerungsmorphismus $f\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $\pi \circ f = \hat{\pi}$ (vgl. Diagramm 2.39 und Aufgabe 2.4.47). Sie ist damit bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt (siehe Aufgabe 2.4.22).

Abbildung 2.39: die universelle Überlagerung

(b) Offenbar sind $\mathrm{ex}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$, $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ und $\pi\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{L}(p, q)$ allesamt universelle Überlagerungen.

Theorem 2.3.45 *(Hauptsatz der Überlagerungstheorie). Sei (X, x_0) ein punktierter, lokal wegzusammenhängender und zusammenhängender Raum, der eine universelle Überlagerung besitzt. Dann gilt: Zu jeder Untergruppe $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ gibt es bis auf Äquivalenz genau eine Überlagerung $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, so dass H die charakteristische Untergruppe von π ist.*

Beweis. Eindeutigkeit: Das haben wir bereits in 2.3.28 gesehen.

Existenz: Sei also $H \subseteq G := \pi_1(X, x_0)$ eine beliebige Untergruppe und $\hat{\pi}\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ die universelle Überlagerung von (X, x_0). Wir fassen H als Untergruppe von $\Gamma = \mathrm{Deck}(\hat{X}, X)$ vermöge des Isomorphismus' $\Phi\colon G \to \Gamma$, $\Phi([\alpha]) = \gamma$ auf, wo γ die Decktransformation von $\hat{\pi}$ ist, die $\hat{x}_0$ in $\hat{\alpha}(1)$ überführt ($\hat{\alpha}$ ist der Lift von α mit $\hat{\alpha}(0) = \hat{x}_0$.)

Idee: Wenn es ein $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit $\mathrm{im}(\pi_*) = H$ gibt, so existiert ein eindeutig bestimmtes $f\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $\pi \circ f = \hat{\pi}$ und dies muss die universelle Überlagerung von $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ sein (vgl. Aufgabe 2.4.50), also

$$\mathrm{Deck}(\hat{X}, \tilde{X}) \cong \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong H.$$

Da f sicher regulär ist, ist damit $\tilde{X} := \hat{X}/H$ mit $\tilde{x}_0 := [\hat{x}_0] = \hat{x}_0 H$ und der kanonischen Projektion der einzige Kandidat.

Wir setzen also $\tilde{X} := \hat{X}/H$, $\tilde{x}_0 = [\hat{x}_0]$ und $f\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ die kanonische Projektion. Dann ist f tatsächlich eine Überlagerung, da H eigentlich diskontinuierlich operiert (siehe 2.3.37). Wir setzen weiter

$$\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0),\ [\hat{x}] \to \hat{\pi}(\hat{x}),$$

was wohldefiniert ist (und das Diagramm 2.40 kommutieren lässt), denn $\hat{\pi}(\gamma.\hat{x}) = \hat{\pi}(\hat{x})$, für alle $\gamma \in H$.

Abbildung 2.40: zum Beweis des Hauptsatzes

Nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie ist π nun zunächst stetig. Ist $x \in X$ beliebig, so wählen wir als Nächstes eine (wegzusammenhängende und offene) Umgebung von x, die bzgl. $\hat{\pi}$ gleichmäßig überlagert ist. Auf der Indexmenge

$$I \cong \hat{\pi}^{-1}(x) = \{\hat{x}_i :\ i \in I\}$$

definieren wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch $i \sim j$, wenn es ein $\gamma \in H$ gibt mit $\gamma.\hat{x}_i = \hat{x}_j$. Es ist dann auch $\gamma(\hat{U}_i) = \hat{U}_j$, wo $\hat{U}_i$ das Blatt über U ist, welches $\hat{x}_i$ enthält (vgl. den Beweis von 2.3.37). Wir wählen nun aus jeder Äquivalenzklasse $[i] \subseteq I$ einen Repräsentanten $\alpha \in [i]$, bekommen damit eine Teilmenge $J \subseteq I$ und setzen $\tilde{U}_\alpha := f(\hat{U}_\alpha)$.

Dann ist

$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in J} \tilde{U}_\alpha$$

und für jedes $\alpha \in J$ gilt: $\pi|\tilde{U}_\alpha\colon \tilde{U}_\alpha \to U$ ist homöomorph, denn

$$f \circ (\hat{\pi}|\hat{U}_\alpha)^{-1} = (\pi|\tilde{U}_\alpha)^{-1}$$

Abbildung 2.41: zur Konstruktion von $\tilde{X}$

ist ein Homöomorphismus. Es ist also π eine Überlagerung.

Schließlich ist nach Konstruktion auch

$$\begin{aligned}
[\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \text{ ist in } H \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \gamma \in \Psi(H) \subseteq \Gamma : \ \gamma.\hat{x}_0 = \hat{\alpha}(1) \\
&\Leftrightarrow \quad \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0 \text{ für den Lift } \tilde{\alpha} \text{ mit } \tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0 \\
&\Leftrightarrow \quad [\alpha] \in \operatorname{im}(\pi_*).
\end{aligned}$$

Es ist also H die charakteristische Untergruppe von π. □

Beispiel 2.3.46 (a) Der Hauptidealring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ hat als Untergruppen gerade die Teilmengen $n\mathbb{Z}$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$). Da $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ ist, hat also $\mathbb{S}^1$ nur die Überlagerungen $\mathrm{pot}_n\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$ für $n \in \mathbb{N}$, welche zu $n\mathbb{Z}$ gehören und die universelle Überlagerung, welche zu $(0) = 0\mathbb{Z}$ gehört (vgl. Diagramm 2.42).

Abbildung 2.42: die Überlagerungen der Kreislinie

(b) Sei $n \geq 2$. Da $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$ ist, gibt es (im Wesentlichen) nur zwei Überlagerungen von $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, nämlich die universelle $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ (zu (0) gehörig) und $\mathrm{id}\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ (zu $\mathbb{Z}_2$ gehörig).

Bemerkung 2.3.47 *Sei X ein lokal wegzusammenhängender und zusammenhängender Raum. Dann gilt: Hat X eine universelle Überlagerung, so hat jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subseteq X$, so dass für die Inklusion $i\colon (U, x) \to (X, x)$ gilt, dass $i_*\colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial ist,*

$$\mathrm{im}(i_*) = (1).$$

Beweis. Sei $\hat{\pi}\colon \hat{X} \to X$ universelle Überlagerung und $x \in X$. Wir wählen eine Umgebung $U \subseteq X$ von x, die gleichmäßig überlagert ist. Sei $\hat{x} \in \hat{\pi}^{-1}(x)$ (beliebig) und $\hat{U} \subseteq \hat{X}$ das Blatt über U, welches $\hat{x}$ enthält. Ist nun $[\alpha]_U \in \pi_1(U, x)$ beliebig, so ist $\hat{\alpha} := (\hat{\pi}|\hat{U})^{-1} \circ \alpha$ geschlossen und der Lift von α mit $\hat{\alpha}(0) = \hat{x}$. Damit ist $[\hat{\alpha}] = 1$, denn $\pi_1(\hat{X}, \hat{x})$ ist trivial. Es folgt

$$i_*([\alpha]_U) = [\alpha_X] = \hat{\pi}_*([\hat{\alpha}]) = \hat{\pi}(1) = 1$$

und damit i_* tatsächlich trivial. □

Definition 2.3.48 Ein lokal wegzusammenhängender und zusammenhängender Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass für die Inklusion $i\colon U \to X$ der Homomorphismus $i_*\colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial ist.

Beispiel 2.3.49 (a) Hat jeder Punkt $x \in X$ eine einfach zusammenhängende Umgebung U, $\pi_1(U) = (1)$, so ist also X semilokal einfach zusammenhängend. Z.B. gilt das für alle Mannigfaltigkeiten.

(b) Ein (abzählbar) unendliches Produkt von Kreislinien (vgl. Aufgabe 1.4.22) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots$ ist nicht semilokal einfach zusammenhängend. Ein (abzählbar) unendliches Bukett von Kreislinien $X = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \cdots$ dagegen wohl. Der Raum

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$$

(siehe Abbildung 2.43) ist wieder nicht semilokal einfach zusammenhängend. Insbesondere ist $X \not\cong Y$ (vgl. Aufgabe 2.4.59).

Abbildung 2.43: der Raum Y

Satz 2.3.50 *Ein lokal wegzusammenhängender, zusammenhängender Raum ist semilokal einfach zusammenhängend, genau wenn er eine universelle Überlagerung besitzt.*

Motivation 2.3.51 Ist $\hat{\pi}\colon \hat{X} \to X$ universelle Überlagerung, so ist $\hat{\pi}$ ein „Bündel" über X mit Faser $\Gamma = \pi_1(X, x_0)$ (wo $x_0 \in X$ fest gewählt ist), d.h.: für alle $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $\mathrm{U} \subseteq X$, so dass

$$\hat{\pi}^{-1}(U) \cong U \times \Gamma$$

ist, wo Γ die diskrete Topologie trägt. Außerdem soll so ein Homöomorphismus $\psi_U\colon U \times \Gamma \to \hat{\pi}^{-1}(U)$ mit den Projektionen $\mathrm{pr}_1\colon U \times \Gamma \to U$ und $\hat{\pi}|\hat{\pi}^{-1}(U)$ verträglich sein,

$$\hat{\pi} \circ \psi_U = \mathrm{pr}_1.$$

Ein solcher Homöomorphismus ist z.B. so gegeben: Man wähle zunächst einen festen Weg γ von x_0 nach x. Dann wähle man die Umgebung U von x als semilokal einfach zusammenhängend und gleichmässig überlagert sowie für jedes $y \in U$ einen weiteren Weg w von x nach y in U. Nun setze man

$$\psi_U\colon U \times \Gamma \to \hat{\pi}^{-1}(U),\ (y, [\alpha]) \mapsto (\widehat{\alpha * \gamma * w})(1).$$

Es ist dann ψ_U zunächst bijektiv und unabhängig von w, weil für ein anderes w' von x zu y der geschlossene Weg $w{*}w'$ nullhomotop ist. Die Einschränkung

$$\psi_U|U \times \{[\alpha]\} \to \hat{U}_{[\alpha]},$$

wo $\hat{U}_{[\alpha]}$ das Blatt über U ist, welches $\psi_U(x, [\alpha])$ enthält, ist daher aber sogar ein Homöomorphismus und damit auch ψ_U.

$\hat{\pi}\colon \hat{X} \to X$ ist nun sogar ein „Prinzipalbündel", d.h.: ist $y \in U_i \cap U_j$ für zwei *Trivialisierungen* $\psi_i\colon \mathrm{U}_i \times \Gamma \to \hat{\pi}^{-1}(U_i)$ mit Basispunkt $x_i \in U_i$ und

$\psi_j\colon U_j \times \Gamma \to \hat{\pi}^{-1}(U_j)$ mit Basispunkt $x_j \in U_j$, sowie fest gewählten Wegen γ_i von x_0 nach x_i und γ_j von x_0 nach x_j, so gilt für den „Übergang“

$$\psi_j^{-1} \circ \psi_i\colon (U_i \cap U_j) \times \Gamma \to (U_i \times U_j) \times \Gamma :$$

$$(y, [(\alpha]) \mapsto (y, [\alpha * (\gamma_i * w_i * w_j^{-1} * \gamma_j^{-1})] = (y, [\alpha] g_{ij}(y)),$$

mit

$$g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \Gamma,\ g_{ij}(y) = [\gamma_i * w_i * w_j^{-1} * \gamma_j^{-1}].$$

Es ist $g_{ij}(y)$ tatsächlich nur von y abhängig, also unabhängig von den Wahlen w_i, w_j und sogar konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $U_i \cap U_j$, insbesondere also stetig. Man nennt $\hat{\pi}\colon \hat{X} \to X$ ein Γ-*Prinzipalbündel*, weil es lokal so aussieht wie $U \times \Gamma$ ($U \subseteq X$ offen) und die *Übergänge* $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \mathrm{Homoeo}(\Gamma)$ durch Rechtsmultiplikation in der Gruppe Γ gegeben sind. Kennt man nun die Überdeckung (U_i) von X und die Übergänge (g_{ij}), so kann man $\hat{X}$ aus der topologischen Summe $\sum_i (U_i \times \Gamma)$ durch „Verkleben“ rekonstruieren,

$$\hat{X} = (\sum_i U_i \times \Gamma)/\!\sim .$$

Das wird in dem folgenden Beweis gemacht.

Beweis. Die Richtung „$\Leftarrow$ “ haben wir bereits in 2.3.47 bewiesen.

„$\Rightarrow$ “: Wir fixeren zunächst einen Punkt $x_0 \in X$ und wählen dann eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X aus wegzusammenhängenden und semilokal einfach zusammenhängenden Teilmengen. Schließlich fixieren wir für jedes $i \in I$ einen Punkt $x_i \in U_i$ und einen Weg γ_i von x_0 nach x_i. Für jedes Paar $(i, j) \in I \times I$ (mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) setzen wir nun $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to \Gamma := \pi_1(X, x_0)$ wie folgt: Zu $x \in U_i \cap U_j$ sei w_i ein Weg von x_i nach x in U_i und w_j ein Weg von x_j nach x in U_j. Dann sei

$$g_{ij}(x) := [\gamma_i * w_i * w_j^{-1} * \gamma_j^{-1}].$$

Weil nun $\pi_1(U_i, x_i) \to \pi_1(X, x_i)$ trivial ist, hängt $g_{ij}(x)$ nicht von den Wahlen w_i, w_j ab und ist auch auf den Wegkomponenten von $U_i \cap U_j$ konstant, also stetig. Wir setzen nun für $(x, [\alpha]) \in U_i \times \Gamma$ und $(y, [\beta]) \in U_j \times \Gamma$:

$$(x, [\alpha]) \sim (y, [\beta]) :\Leftrightarrow\ x = y,\ [\beta] = [\alpha] g_{ij}(x)$$

und

$$\hat{X} := (\sum_i U_i \times \Gamma)/\!\sim$$

mit der Quotiententopologie sowie $\hat{\pi}: \hat{X} \to X$,

$$\hat{\pi}([(x,[\alpha])_i]) = x,$$

wo hier $(x,[\alpha])_i = \iota_i(x,[\alpha])$ mit der kanonischen Inklusion $\iota_i: U_i \times \Gamma \to \sum_k U_k \times \Gamma$ bezeichnet.

Bezeichnen wir nun weiter mit $q: \sum_i U_i \times \Gamma \to \hat{X}$ die kanonische Projektion,

$$(x,[\alpha])_i \mapsto [(x,[\alpha])_i],$$

so ist $q_i := q|U_i \times \{[\alpha]\}$ ein Homöomorphismus auf sein Bild $\hat{U}^i_{[\alpha]} = q(U_i \times \{[\alpha]\})$ und daher ist

$$\hat{\pi}^{-1}(U_i) = \dot{\bigcup}_{[\alpha]\in\Gamma} \hat{U}^i_{[\alpha]}$$

und $\hat{\pi}|\hat{U}^i_{[\alpha]}: \hat{U}^i_{[\alpha]} \to U_i$ ist ein Homöomorphismus, weil $\hat{\pi}|\hat{U}^i_{[\alpha]} = \mathrm{pr}_1 \circ q_i^{-1}$ und $(\hat{\pi}|\hat{U}^i_{[\alpha]})^{-1} = q_i \circ \iota^i_{[\alpha]}$ ist, wo $\iota^i_{[\alpha]}: U_i \to U_i \times \{[\alpha]\}$ die offensichtliche Abbildung ist. Es ist damit $\hat{\pi}$ eine (vielleicht noch unzusammenhängende) Überlagerung (d.h.: wir müssen noch zeigen, dass $\hat{X}$ zusammenhängend ist), auf jeden Fall schon mal lokal wegzusammenhängend. Außerdem dürfen wir (auch im eventuell unzusammenhängenden Fall) Wege (eindeutig) liften und behaupten nun:

Lemma 2.3.52 Sei $i_0 \in I$ derart, dass $x_0 \in U_{i_0}$ ist und $[\alpha] \in \Gamma = \pi_1(X,x_0)$. Ist nun $[\beta] \in \Gamma$ beliebig, so sei $\hat{\alpha}$ der Lift von α nach $\hat{X}$ mit Anfang $[(x_0,[\beta])_{i_0}]$. Dann gilt, dass der Endpunkt von $\hat{\alpha}$ gerade $[(x_0,[\beta][\alpha])_{i_0}] \in \hat{X}$ ist.

Schluss des Beweises von 2.3.50. Behauptung: $\hat{X}$ ist zusammenhängend. Seien dazu $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \hat{X}$ beliebig. Wir wählen dann zunächst Wege γ_1, γ_2 in X von $x_1 := \pi(\hat{x}_1)$ nach x_0 bzw. von $x_2 := \pi(\hat{x}_2)$ zu x_0. Als Nächstes liften wir diese Wege nach $\hat{X}$ zu $\hat{\gamma}_1$ bzw. $\hat{\gamma}_2$ mit Anfang $\hat{x}_1$ bzw. $\hat{x}_2$. Daher sind $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$ mit der Faser $\hat{\pi}^{-1}(x_0)$ verbindbar und wir dürfen daher annehmen, dass $x_1 = x_2 = x_0$ ist und sogar, dass $\hat{x}_1 = \hat{x}_0 := [(x_0,1)_{i_0}]$ und $\hat{x}_2 = [(x_0,[\alpha])_{i_0}]$ für einen geschlossenen Weg α in X (mit Aufpunkt x_0) ist. Der Lift $\hat{\alpha}$ von α mit Anfang $\hat{x}_0$ verbindet aber dann nach Lemma 2.3.52 $\hat{x}_1$ mit $\hat{x}_2$.

Behauptung: $\hat{X}$ ist einfach zusamenhängend. Sei dazu wie oben $\hat{x}_0 := [(x_0,1)_{i_0}]$ und $\hat{\alpha}$ ein geschlossener Weg in $\hat{X}$ mit Aufpunkt $\hat{x}_0$. Dann ist $\hat{\alpha}$ der Lift von $\alpha := \pi \circ \hat{\alpha}$ mit Anfang $\hat{x}_0$. Nach Lemma 2.3.52 ist dann aber

$$[(x_0,1)_{i_0}] = \hat{x}_0 = \hat{\alpha}(1) = [(x_0, 1\cdot[\alpha])_{i_0}]$$

und damit $[\alpha] = 1$ in $\pi_1(X,x_0)$. Aber dann ist mit Bemerkung 2.3.22 auch $[\hat{\alpha}] = 1$, also $\pi_1(\hat{X},\hat{x}_0)$ trivial. □

Beweis von Lemma 2.3.52. Zu $\alpha\colon I \to X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ wählen wir zunächst ein $k \in \mathbb{N}$ und $i_0, \dots, i_k \in I$ mit i_0 wie oben und $i_k = i_0$, so dass für eine Unterteilung $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ von I die Kurvenstücke $\alpha([t_{j-1}, t_j])$ in U_{i_j} enthalten sind für $j = 1, \dots, k$. Wir setzen dann $x_j := \alpha(t_j)$ und $w_j(s) = \alpha((1-s)t_{j-1} + st_j)$ (für $s \in I$), so dass also $w_j(I) = \alpha([t_{j-1}, t_j])$ ist. Nach Konstruktion der Übergänge (g_{ij}) gibt es nun Wege γ_j von x_0 nach x_j (wo wir γ_0 und γ_k als den konstanten Weg annehmen dürfen), so dass

$$g_{j-1,j}(x_j) = [\alpha_j]$$

ist, wo wir $\alpha_j = \gamma_{j-1} * w_j * * \gamma_j^{-1}$ gesetzt haben $(j = 1, \dots, k)$, vgl. Abbildung 2.44.

Abbildung 2.44: zum Beweis des Lemmas

Sei nun $\hat{x}_j = \hat{\alpha}(t_j)$, wo $\hat{\alpha}$ der Lift von α mit Anfang $\hat{x}_0 = [(x_0, [\beta])_{i_0}]$ ist. Ist dann $\hat{x}_{j-1} = [(x_{j-1}, [\delta])_{i_{j-1}})]$ für ein δ, so ist auch $\hat{x}_j = [(x_j, [\delta])_{i_{j-1}}]$, denn $\hat{\alpha}|[t_{j-1}, t_j]$ verläuft ja in einem Blatt über $U_{i_{j-1}}$. Es folgt nun damit

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(1) &= [(x_0, [\beta] g_{i_0 i_1}(x_0) g_{i_1 i_2}(x_1) \cdots g_{i_{k-1} i_k}(x_{k-1}))_{i_0}] \\ &= [(x_0, [\beta][\alpha_1] \cdots [\alpha_k])_{i_0}] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_1 * \cdots * \alpha_k &= (\gamma_0 * w_1 * \gamma_1^{-1}) * \cdots * (\gamma_{k-1} * w_k * \gamma_k^{-1}) \\ &= w_1 * \cdots * w_k \simeq \alpha \end{aligned}$$

und damit

$$\hat{\alpha}(1) = [(x_0, [\beta][\alpha])_{i_0}].$$

□

Kommentar 2.3.53 In nicht seltenen Fällen von mathematischen Disziplinen (von Kategorien) in Geometrie und Topologie ist es möglich, die einfach zusammenhängenden Objekte zu klassifizieren. Deshalb findet die Überlagerungstheorie so häufig Anwendung auch außerhalb der Algebraischen Topologie:

(a) Funktionentheorie: Eine *Riemannsche Fläche* ist eine 1-dimensionale *komplexe Mannigfaltigkeit*, d.h. eine 2-Mannigfaltigkeit X mit einem *Atlas* $(\varphi_i\colon U_i \to V_i \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C})_i$, so dass alle *Übergänge* $\tau_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i$ holomorph sind. Ist X eine Riemannsche Fläche und $\pi\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, so *erbt* $\tilde{X}$ die Struktur einer Riemannschen Fläche, so dass π holomorph wird, in dem man einen holomorphen Atlas gleichmäßig überlagerter Karten (U_i) wählt und diese dann auf $\tilde{X}$ liftet.

Der so genannte *Uniformisierungssatz* der Funktionentheorie besagt, dass es (bis auf biholomorphe Äquivalenz) nur drei einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen $\hat{X}$ gibt, nämlich

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\} \text{ die } \textit{Einheitskreisscheibe} \\ \mathbb{C} & & \text{die komplexe Zahlenebene} \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & = & \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/\mathbb{C}^* \text{ die } \textit{Riemannsche Zahlenkugel}, \end{array}$$

vgl. Aufgabe 2.4.54. Bestimmt man daher

$$\mathrm{Aut}(X) = \{f\colon \hat{X} \to \hat{X} :\ f \text{ ist holomorph}\}$$

(was einfach ist), und dann alle Untergruppen $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(\hat{X})$, die eigentlich diskontinuierlich operieren (für $\mathbb{C}$ und $\mathbb{P}^1$ einfach, für $\triangle$ schwer), so hat man *alle* Riemannschen Flächen $X = \hat{X}/\Gamma$.

(b) Differentialgeometrie: Eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit* X ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit zusammen mit einem Skalarprodukt g_x auf jedem Tangentialraum TX_x (differenzierbar abhängig von x). Ist $\pi\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, so *erbt* $\tilde{X}$ eine Riemannsche Struktur (und π wird damit zu einer *lokalen Isometrie* bzgl. der induzierten metrischen Strukturen). Hat X *konstante Krümmung*, so auch $\tilde{X}$ (weil Krümmung ein lokaler Begriff ist). Der Satz von *Killing-Hopf* besagt, dass es für jedes $n \geq 2$ (nach Skalierung bis auf Isometrie) genau drei einfach zusammenhängende, *vollständige* Riemannsche Mannigfaltigkeiten $\hat{X}$ konstanter Krümmung der Dimension n gibt, nämlich

$$\begin{array}{rl} (\mathbb{S}^n, g_{\mathrm{sph}}) & \text{die } \textit{runde Sphäre}, \\ (\mathbb{E}^n, g_{\mathrm{eukl}}) & \text{der } \textit{euklidische Raum}, \\ (\mathbb{H}^n, g_{\mathrm{hyp}}) & \text{der } \textit{hyperbolische Raum}. \end{array}$$

Bestimmt man daher wieder

$$\mathrm{Isom}(\hat{X}) = \{f\colon \hat{X} \to \hat{X} :\ f \text{ ist Isometrie}\}$$

(was einfach ist), und alle Γ's in $\mathrm{Isom}(\hat{X})$ (für $\mathbb{S}^n$ und $\mathbb{E}^n$ einfach, für $\mathbb{H}^n$ ungelöst), so kennt man alle *Raumformen* $X = \hat{X}/\Gamma$.

(c) Lietheorie: Eine *Liegruppe* G ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Gruppenstruktur, so dass $(g,h) \mapsto gh$ und $g \mapsto g^{-1}$ differenzierbar sind. Die *linksinvarianten Vektorfelder* $\mathrm{Lie}(G) \subseteq \Xi(G)$ (wo $\Xi(G)$ die ∞-dimensionale *Liealgebra* aller (glatten) Vektorfelder auf G bezeichne) sind eine n-dimensionale Lie-Unteralgebra von $\Xi(G)$, die als Vektorraum mit T_eG identifiziert werden kann ($e \in G$ das neutrale Element und $n = \dim(G)$).

Ein wichtiger Satz der Lietheorie besagt, dass es zu jeder (abstrakten) Liealgebra L der Dimension $n \in \mathbb{N}$ bis auf Isomorphie genau eine einfach zusammenhängende Liegruppe $\hat{G}$ (der Dimension n) gibt, so dass $\mathrm{Lie}(\hat{G}) = L$ ist. Kennt man alle Γ's in $\mathrm{Aut}(\hat{G})$ (und alle L's), so kennt man alle Liegruppen.

2.4 Aufgaben

Aufgaben zu 2.1: Homotope Abbildungen

2.4.1 Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $x_0 \in X$ gibt, so dass für jedes $x \in X$ die geradlinige Verbindung $\overline{x_0 x}$ ganz in X liegt. (x_0 heißt dann ein *Sternpunkt von* X.) Zeigen Sie: Jede sternförmige Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar.

2.4.2 Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ die *Potenzfunktion* $z \mapsto z^n$. Zeigen Sie, dass der Abbildungsgrad von f gerade n ist, $\deg(f) = n$.

2.4.3 Sei $H\colon I \times I \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Unterteilung $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ von I gibt ($k \in \mathbb{N}$), so dass für alle $s \in I$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$ und $j = 0, \ldots, k-1$ gilt:

$$|H(s,t) - H(s,t_j)| < \varepsilon.$$

2.4.4 Zeigen Sie, dass der *Brouwersche Fixpunktsatz* (vgl. Korollar 2.1.20) auch in der Dimension $n = 1$ gilt: Ist $f\colon \mathbb{B}^1 \to \mathbb{B}^1$ stetig, so hat f einen Fixpunkt. (Hinweis: Zwischenwertsatz für stetige Funktionen) (Wir werden später sehen (siehe Satz 3.3.6), dass der Fixpunktsatz sogar in jeder Dimension richtig ist.)

2.4.5 Seien $f, g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie:

$$\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g).$$

2.4.6 (a) Seien $f, f', g, g' \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ mit $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$. Zeigen Sie, dass dann auch $f \cdot g$ und $f' \cdot g'$ homotop sind.

(b) Zeigen Sie für alle $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$:

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g).$$

2.4.7 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$. Für jedes $x \in \mathbb{B}^n$ mit $f(x) \neq x$ sei $r(x) \in \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$ der Durchschnitt des Strahls $L = \{f(x) + t(x - f(x)) \in \mathbb{R}^n : t \geq 0\}$ mit der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$. Geben Sie eine Formel für $r(x)$ an und zeigen Sie damit, dass mit $A = \{x \in \mathbb{B}^n : f(x) = x\}$ die Abbildung $r\colon \mathbb{B}^n \setminus A \to \mathbb{S}^{n-1}$ stetig ist.

2.4.8 Formulieren Sie den Retraktionssatz und den Brouwerschen Fixpunktsatz für alle Dimensionen $n \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie, dass die Aussagen äquivalent zueinander sind.

2.4.9 Zeigen Sie: Ein topologischer Raum ist genau dann zusammenziehbar, wenn er den gleichen Homotopietyp wie der einpunktige topologische Raum hat.

2.4.10 Zeigen Sie, dass der Kammraum (vgl. 1.3.10) kein Retrakt des Quadrates I^2 ist.

2.4.11 Zeigen Sie, dass der punktierte Torus $\mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$ den Homotopietyp der Figur Acht $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ hat.

2.4.12 (a) Zeigen Sie für die Sphäre $X = \mathbb{S}^2$ und den Torus $X = \mathbb{T}^2$: Sind $p, q \in X$ beliebig, so gibt es einen Homöomorphismus $f\colon X \to X$ mit $f(p) = q$.

(b) Zeigen Sie, dass diese *Homogenität* auch für die Brezelflächen höheren Geschlechtes $\mathbb{F}_g$ $(g \geq 2)$ gilt.

Aufgaben zu 2.2: Die Fundamentalgruppe

2.4.13 Sei X ein topologischer Raum und $p \in X$. Zeigen Sie, dass für die Umparametrisierungen $\varphi\colon I \to I$ aus dem Beweis von Proposition 2.2.6 tatsächlich für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}(p)$ gilt:

(a)

$$(\alpha * \beta) * \gamma = (\alpha * (\beta * \gamma)) \circ \varphi;$$

(b)

$$\alpha \circ \varphi = \alpha * c_p.$$

2.4.14 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie sowie X und Y Objekte in $\mathcal{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Identität $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}(X, X)$ eindeutig bestimmt ist.

(b) Ist $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ und gibt es ein $g \in \mathrm{Mor}(Y, X)$, so dass $gf = \mathrm{id}_X$ und $fg = \mathrm{id}_Y$ ist, so ist g mit dieser Eigenschaft auch eindeutig bestimmt.

2.4.15 Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor* $T\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ ordnet jedem Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ein Objekt $X_2 = T(X_1)$ in $\mathcal{C}_2$ zu und jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ in $\mathcal{C}_1$ einen Morphismus $T(f) = f^* \in \mathrm{Mor}(T(Y_1), T(X_1))$ in $\mathcal{C}_2$ so zu, dass folgendes gilt:

(i) Für jedes Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ ist $T(\mathrm{id}_{X_1}) = \mathrm{id}_{T(X_1)}$;

(ii) für je zwei komponierbare Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ und $g \in \mathrm{Mor}(Y_1, Z_1)$ in $\mathcal{C}_1$ gilt:

$$T(gf) = T(f)T(g) \quad \text{kurz: } (gf)^* = f^* g^*.$$

Nun zeigen Sie:

(a) Sei K ein Körper und $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_K$ die Kategorie der K-Vektorräume. Für jedes Objekt V in $\mathcal{C}$ sei $T(V) = V^*$ der Dualraum von V und für jeden Morphismus $f\colon V \to W$ in $\mathcal{C}$ sei $T(f) = f^*\colon W^* \to V^*$ die zu f duale Abbildung. Zeigen Sie, dass T ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$ auf sich selbst ist.

(b) Sei nun wieder K ein Körper und W ein fester K-Vektorraum. Für ein Objekt V in $\mathcal{C} := \mathbf{Vect}_K$ sei $T(V) = \mathrm{Hom}(V, W)$ der Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W und für einen Morphismus $f\colon V_1 \to V_2$ sei $T(f) = \mathrm{Hom}(f, W) = f^*\colon \mathrm{Hom}(V_2, W) \to \mathrm{Hom}(V_1, W)$ gegeben durch $f^*(h) = h \circ f$. Zeigen Sie, dass $T = \mathrm{Hom}(-, W)$ ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$ auf sich selbst ist. (Man beachte, dass dieses Beispiel für $W = K$ in das Beispiel (a) übergeht.)

(c) Für jede abelsche Gruppe G sei $T(G) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q})$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Gruppenhomomorphismen von G nach $\mathbb{Q}$ und für einen Morphismus $f\colon G_1 \to G_2$ sei $T(f) = \mathrm{Hom}(f, \mathbb{Q})$ wie unter (b). Zeigen Sie, dass $T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q})$ ein kontravarianter Funktor von $\mathbf{Ab}$ nach $\mathbf{Vect}_{\mathbb{Q}}$ ist.

2.4.16 (a) Sei K ein Körper und V ein fester K-Vektorraum. Für jedes Objekt W in $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_K$ sei $T(W) = \mathrm{Hom}(V, W)$ und für jeden Morphismus $f\colon W_1 \to W_2$ sei $T(f) = f_*\colon \mathrm{Hom}(V, W_1) \to \mathrm{Hom}(V, W_2)$ gegeben durch $f_*(h) = f \circ h$. Zeigen Sie, dass $T = \mathrm{Hom}(V, -)$ ein covarianter Funktor von $\mathcal{C}$ auf sich selbst ist. (Hom ist ein *Bifunktor* von $\mathbf{Vect}_K \times \mathbf{Vect}_K$ nach $\mathbf{Vect}_K$, kontravariant im 1. und covariant im 2. Argument.)

(b) Sei K ein Körper. Definieren Sie in ähnlicher Weise das *Tensorprodukt* $T = \otimes$ als einen Bifunktor von $\mathbf{Vect}_K \times \mathbf{Vect}_K$ nach $\mathbf{Vect}_K$, kovariant in beiden Argumenten.

2.4.17 (a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Für jeden punktierten topologischen Raum (X, p) sei

$$\pi_k(X, p) := \mathrm{Mor}((\mathbb{S}^k, \mathbf{1}), (X, p))/\simeq$$

die k-te Homotopiemenge von (X, p) (vgl. 2.2.17.(b)) und für einen Morphismus $f: (X, p) \to (Y, q)$ in $\mathcal{C} = \mathbf{Top}_0$ sei $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Zeigen Sie, dass f_* wohldefiniert ist und π_k zu einem Funktor von $\mathbf{Top}_0$ nach **Ens** macht.

(b) Zeigen Sie nun, dass zwei Morphismen $\alpha, \beta: (\mathbb{S}^0, \mathbf{1}) \to (X, p)$ genau dann homotop sind, $[\alpha] = [\beta]$, wenn $\alpha(-1)$ und $\beta(-1)$ in der gleichen Wegkomponente liegen. Zeigen Sie weiter, dass unter dieser Korrespondenz $\pi_0(X, p) \to \pi_0(X)$,

$$[\alpha] \mapsto U(\alpha(-1)),$$

für einen Morphismus f in $\mathbf{Top}_0$ sich die Definitionen von f_* aus Teil (a) und Kommentar 2.2.17 entsprechen.

2.4.18 (a) Definieren Sie ähnlich zu dem Kegelfunktor $\mathcal{C}: \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ aus Kommentar 2.2.17 auch einen *Zylinderfunktor* $\mathcal{Z}: \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ und einen *Einhängungsfunktor* $\mathcal{S}: \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ (vgl. Definition 1.2.10).

(b) Sei (Y, q) ein fester punktierter Raum. Definieren Sie nun die Einpunktvereinigung $T = - \vee (Y, q)$ (vgl. Beispiel 1.2.18) als einen Funktor von $\mathbf{Top}_0$ auf sich selbst.

2.4.19 Sei G eine Gruppe. Für zwei Elemente $a, b \in G$ heißt

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$

der *Kommutator* von a und b. Die von allen Kommutatoren *erzeugte Untergruppe* (d.h. die kleinste Untergruppe, die alle Kommutatoren enthält) heißt die *Kommutator-Untergruppe* G' von G.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Element $x \in G'$ ein (endliches) Produkt von Kommutatoren ist.

(b) Zeigen Sie, dass G' ein Normalteiler von G ist. Wir nennen $G^{\mathrm{ab}} := G/G'$ (zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi: G \to G^{\mathrm{ab}}$) die *Abelianisierung* von G.

(c) Zeigen Sie, dass G^{ab} abelsch ist und $\pi: G \to G^{\mathrm{ab}}$ folgende *universelle Eigenschaft* erfüllt: Ist H eine abelsche Gruppe und $\varphi: G \to H$ ein Homomorphismus, so existiert genau ein Homomorphismus $\bar{\varphi}: G^{\mathrm{ab}} \to H$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$ (vgl. Diagramm 2.45).

Abbildung 2.45: universelle Eigenschaft der Abelianisierung

2.4.20 Seien G_1 und G_2 Gruppen und $\pi_j \colon G_j \to G_j^{\mathrm{ab}}$ ihre Abelianisierungen ($j = 1, 2$).

(a) Sei nun $\varphi \colon G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass es genau einen Homomorphismus $\varphi^{\mathrm{ab}} \colon G_1^{\mathrm{ab}} \to G_2^{\mathrm{ab}}$ gibt mit $\varphi^{\mathrm{ab}} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$ (vgl. Diagramm 2.46).

(b) Wir definieren nun eine Zuordnung $T = (\cdot)^{\mathrm{ab}} \colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ durch $T(G) := G^{\mathrm{ab}}$ auf den Objekten und $T(\varphi) = \varphi^{\mathrm{ab}}$ auf den Morphismen. Zeigen Sie, dass T ein Funktor ist.

Abbildung 2.46: die Abelianisierung eines Homomorphismus'

2.4.21 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und seien X_1 und X_2 zwei Objekte in $\mathcal{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass ein Produkt (X, p_1, p_2) von X_1 und X_2 in folgendem Sinne bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist: Ist (Y, q_1, q_2) ein weiteres Produkt von X_1 und X_2, so gibt es einen (sogar eindeutig bestimmten) Isomorphismus $\Phi \in \mathrm{Mor}(Y, X)$ mit $p_i \Phi = q_i$ ($i = 1, 2$).

(b) Formulieren und zeigen Sie dann ganz ähnlich, dass eine Summe von X_1 und X_2 eindeutig bestimmt ist.

2.4.22 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(a) Man nennt ein Objekt X in $\mathcal{C}$ *initial*, wenn es für jedes Objekt Y in $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus von X nach Y gibt. Zeigen Sie, dass ein initiales Objekt einer Kategorie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

(b) Man nennt ein Objekt Y in $\mathcal{C}$ *final*, wenn es für jedes Objekt X in $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus von X nach Y gibt. Zeigen Sie, dass ein finales Objekt einer Kategorie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

(c) Gibt es initiale bzw. finale Objekte in den Kategorien **Ens** bzw. $\mathbf{Vect}_K$ (K ein Körper)? Wenn ja, welche?

2.4.23 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X_1, X_2 Objekte in $\mathcal{C}$. Definieren Sie neue Kategorien $\mathcal{C}_{XY}$ derart, dass ein Produkt bzw. eine Summe von X_1 und X_2 darin ein finales bzw. initiales Objekt ist.

2.4.24 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine beliebige Familie von Objekten in $\mathcal{C}$.

(a) Definieren Sie, was man wohl ein Produkt bzw. eine Summe von (X_α) nennen wird.

(b) Geben Sie Produkt und Summe einer Familie (X_α) in der Kategorie **Ens** an.

(c) Sei K ein Körper. Geben Sie Produkt und Summe einer Familie (V_α) in der Kategorie $\mathbf{Vect}_K$ an.

2.4.25 Sei $k \in \mathbb{N}$. Gegeben sei die stetige Abbildung $f\colon (\mathbb{S}^k, \mathbf{1}) \to (\mathbb{S}^k, \mathbf{1}) \vee (\mathbb{S}^k, \mathbf{1})$, die die obere Hemiphäre $H_+ = \{x \in \mathbb{S}^k : x_{k+1} \geq 0\}$ auf die „obere k-dimensionale Schlaufe $\iota_1(\mathbb{S}^k) \subseteq \mathbb{S}^k \vee \mathbb{S}^k$, die untere Hemisphäre H_- auf die untere Schlaufe $\iota_2(\mathbb{S}^k) \subseteq \mathbb{S}^k \vee \mathbb{S}^k$ (und damit den Äquator auf den Basispunkt $\iota_1(\mathbf{1}) = \iota_2(\mathbf{1})$) abbildet (vgl. Abbildung 2.47).

(a) Geben Sie eine explizite Formel für f an.

(b) Sei (X,p) ein punktierter Raum. Für zwei *Schlaufen* $\alpha, \beta \colon (\mathbb{S}^k, \mathbf{1}) \to (X,p)$ definieren wir die Hintereinanderausführung $\alpha * \beta \colon (\mathbb{S}^k, \mathbf{1}) \to (X,p)$ durch

$$\alpha * \beta := (\alpha \vee \beta) \circ f.$$

Zeigen Sie: Ist $\alpha \simeq \alpha'$ und $\beta \simeq \beta'$ (als Abbildungen zwischen punktierten Räumen), so ist auch $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$.

(c) Auf $\pi_k(X,p) = \mathrm{Mor}((\mathbb{S}^k, \mathbf{1}), (X,p))/\simeq$ defniniert man daher

$$[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta].$$

Zeigen Sie (ähnlich wie im Fall $k = 1$), dass $\pi_k(X,p)$ damit zu einer Gruppe wird, die man die *k-te Homotopiegruppe* von (X,p) nennt.

(d) Zeigen Sie nun, dass π_k zusammen mit seiner Definition auf Morphismen (vgl. Kommentar 2.2.17.(b)) für $k \geq 1$ ein Funktor von $\mathbf{Top_0}$ nach **Grp** ist.

Abbildung 2.47: Hintereinanderschaltung von Schlaufen

2.4.26 Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Wir fassen in dieser Aufgabe $(\mathbb{S}^k, \mathbf{1})$ als den (abgeschlossenen) *Einheitswürfel* $\mathbb{W}^k \subseteq \mathbb{R}^k$ auf, $\mathbb{W}^k := I^k$, bei dem wir den Rand zu einem Punkt (dem Basispunkt von $(\mathbb{S}^k, \mathbf{1})$) identifizieren. Zeigen Sie mit Hilfe der folgenden Abbildungen (siehe 2.48), dass alleine durch Umparametrisierungen in $(\mathbb{S}^k, \mathbf{1})$ für alle $[\alpha], [\beta] \in \pi_k(X,p)$ gilt:

$$[\alpha][\beta] = [\beta][\alpha].$$

Abbildung 2.48: die Kommutativität der höheren Homotopiegruppen

2.4.27 (a) Sei X ein topologischer Raum, $k \in \mathbb{N}$, $p, q \in X$ und γ ein Weg von p nach q. Zeigen Sie, dass $\pi_k(X, p) \cong \pi_k(X, q)$ ist. (Ist X wegzusammenhängend, so schreiben wir $\pi_k(X)$ für die Isomorphieklasse von $\pi_k(X, p)$ wie im Falle $k = 1$.)

(b) Zeigen Sie, dass auch π_k ($k \in \mathbb{N}_0$) Produkte respektiert:

$$\pi_k(X_1 \times X_2, (p_1, p_2)) \cong \pi_k(X_1, p_1) \times \pi_k(X_2, p_2).$$

(c) Zeigen Sie, dass auch π_k ($k \in \mathbb{N}_0$) über den Funktor $\simeq\colon \mathbf{Top}_0 \to \mathbf{HTop}_0$ faktorisiert.

2.4.28 Sei G eine Gruppe und $H \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G. Zeigen Sie die universelle Eigenschaft der kanonischen Projektion $\pi\colon G \to G/H$: Ist G' eine weitere Gruppe und $f\colon G \to G'$ ein Homomorphismus mit $\ker(f) \supseteq H$, so existiert genau ein Homomorphismus $\bar{f}\colon G/H \to G'$ mit $\bar{f} \circ \pi = f$.

2.4.29 (a) Sei A eine Menge, $F(A)$ die von ihr frei erzeugte Gruppe und $\iota\colon A \to F(A)$ die Abbildung, die $a \in A$ das einbuchstabige Wort $a = \iota(a)$ zuordnet. Zeigen Sie die universelle Eigenschaft von $(F(A), \iota)$: Ist G eine weitere Gruppe und $f\colon A \to G$ eine Abbildung, so existiert genau ein Homomorphismus $\bar{f}\colon F(A) \to G$ mit $\bar{f} \circ \iota = f$ (vgl. Diagramm 2.49).

(b) Seien A und B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Benutzen Sie (a) um zu zeigen, dass es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f_*\colon F(A) \to F(B)$ gibt, der jedes einbuchstabige Wort $a \in F(A)$ auf das einbuchstabige Wort $f(a) \in F(B)$ schiebt. Zeigen Sie dann, dass dies $F\colon \mathbf{Ens} \to \mathbf{Grp}$ zu einem Funktor macht.

Abbildung 2.49: universelle Eigenschaft der freien Gruppe

2.4.30 Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge. Zeigen Sie, dass U ein Intervall sein muss.

2.4.31 Sei X ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ definiert man den *Durchmesser* von A durch

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \in [0,\infty) : \ x, y \in A\} \in [0,\infty].$$

Zeigen Sie: ist X kompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X, so gibt es ein $\lambda > 0$ (eine *Lebesguesche Zahl*), so dass für jede Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\operatorname{diam}(A) < \lambda$ gilt: Es gibt ein $i \in I$ mit $A \subseteq U_i$. (Hinweis: Wählen Sie für jedes $x \in X$ ein $r_x > 0$, so dass $B(x, r_x)$ in einem U_i liegt und überdecken Sie dann X mit endlichen vielen Bällen vom halben Radius $B(x, r_x/2)$.)

2.4.32 Sei R die Äquivalenzrelation auf $X = I^2$, die von $(0,t) \sim (1, 1-t)$ und $(s, 0) \sim (1-s, 1)$ erzeugt wird ($s, t \in I$, vgl. Beispiel 1.2.12).

(a) Zeigen Sie, dass der induzierte Quotientenraum $P := X/{\sim}$ homömorph zur reell-projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist (vgl. Diagramm 2.50).

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe des Satzes von Seifert-van Kampen:

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

2.4.33 Berechnen Sie die Fundamentalgruppen des Möbiusbandes und der Kleinschen Flasche.

2.4.34 Seien X und Y zusammenhängende (topologische) Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $f \colon \mathbb{B}^n \to A$, $g \colon \mathbb{B}^n \to B$ Homöomorphismen des (abgeschlossenen) Einheitsballes $\mathbb{B}^n$ auf abgeschlossene Teilmengen $A \subseteq X$

Abbildung 2.50: die projektive Ebene

bzw. $B \subseteq Y$. Auf $T := (X \setminus \mathrm{int}(A) + Y \setminus (B))$ (mit der Summentopologie) betrachte man die Äquivalenzrelation, die durch $f(\xi) \sim g(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$ erzeugt wird ($\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$). Den Quotientenraum $X \sharp Y := T/{\sim}$ nennt man die *zusammenhängende Summe* von X und Y (vgl. Abbildung 2.51). Zeigen Sie für alle $n \geq 3$:

$$\pi_1(X \sharp Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y).$$

Abbildung 2.51: die zusammenhängende Summe

2.4.35 Sei $g \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{F}_g$ die geschlossene, orientierte Fläche vom Geschlecht g. Berechnen Sie die Abelianisierung $\pi_1(\mathbb{F}_g)^{\mathrm{ab}}$ (vgl. Aufgabe 2.4.19) und zeigen Sie damit: Ist $g \neq g'$, so ist $\mathbb{F}_g \not\cong \mathbb{F}_{g'}$.

Aufgaben zu 2.3: Überlagerungen

2.4.36 Sei X ein topologischer Raum. Man nennt eine Teilmenge $A \subseteq X$ *diskret*, wenn es für jedes $x \in A$ eine Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt mit $U \cap A = \{x\}$. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann diskret, wenn die Teilraumtopologie von A diskret ist.

2.4.37 (a) Zeigen Sie, dass die Exponentialabbildung $\mathrm{ex}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ eine unendlich-blättrige Überlagerung ist. (Hinweis: Verwenden Sie geeignete *Zweige des Logarithmus'* für die lokalen Inversen von ex.)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die *Potenzfunktion* $\mathrm{pot}_n\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$, eine n-blättrige Überlagerung ist. (Hinweis: Verwenden Sie geeignete *Zweige der n-ten Wurzel*.)

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Projektion $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ eine 2-blättrige Überlagerung ist. (Hinweis: Verwenden Sie den *Standardatlas* $(U_0, \dots, U_n)$ von $\mathbb{P}^n$ mit $(i = 0, \dots, n)$

$$U_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n : \ x_i \neq 0\}).$$

2.4.38 Sei X ein topologischer Raum, G eine topologische Gruppe und G operiere auf X.

(a) Zeigen Sie, dass

$$N := \{g \in G : \ g.x = x \text{ für alle } x \in X\}$$

ein abgeschlossener Normalteiler von G ist und eine Wirkung von G/H (als topologischer Gruppe) auf X induziert, die effektiv ist, $(gN).x := g.x$.

(b) Sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass $G_x \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe von G ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch $x \sim y \Leftrightarrow y \in Gx$ eine Äquivalenzrelation auf X gegeben wird.

2.4.39 Sei $n \in \mathbb{N}$. Die diskrete Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiere auf $X = \mathbb{R}^n$ durch Translationen, $\gamma.x = x + \gamma$, für $\gamma \in \Gamma$ und $x \in X$. Zeigen Sie, dass die Operation frei ist und die Inklusion $\iota\colon \mathbb{W}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ einen Homöomorphismus $\bar{\iota}\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ induziert (siehe Diagramm 2.52). (Ist eine Abbildung $f\colon A \to B$ injektiv, so benutzen wir gelegentlich dafür die Notation $f\colon A \hookrightarrow B$, z.B. bei Inklusionen.)

Abbildung 2.52: der n-dimensionale Torus

2.4.40 Sei X ein topologischer Raum, G eine topologische Gruppe und G operiere auf X. Sei $x \in X$ und H die Standgruppe von x, $H = G_x$. Man nennt dann

$$\varphi_x\colon G \to X,\ \varphi_x(g) = g.x,$$

die *Bahnabbildung* von x. Zeigen Sie: Die Bahnabbildung φ_x induziert eine Abbildung $\bar{\varphi}_x\colon G/H \to Gx \subseteq X$, die stetig und bijektiv ist. (G/H trägt hierbei die Quotiententopologie als Bahnenraum unter der Wirkung $h.g = gh^{-1}$ von H auf G.)

2.4.41 Sei nun Γ diskret und Γ operiere eigentlich diskontinuierlich auf einem Raum X. Zeigen Sie: Γ operiert dann frei und jede Bahnabbildung $\varphi_x\colon \Gamma \to \Gamma x \subseteq X$ ist ein Homöomorphismus.

2.4.42 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ operiere auf $X = \mathbb{R}^n$ durch Translationen, $\gamma.x = x+\gamma$ (für $\gamma \in \Gamma$ und $x \in X$). Zeigen Sie, dass diese Operation eigentlich diskontinuierlich ist und $\mathrm{ex}^n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ einen Homöomorphismus von $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ nach $\mathbb{T}^n$ induziert.

2.4.43 Versuchen Sie die Kleinsche Flasche $\mathbb{K}$ (vgl. Beispiel 1.2.12) als Quotient von $\mathbb{R}^2$ nach einer eigentlich diskontinuierlich wirkenden Gruppe Γ von *Bewegungen* (d.s. die bezgl. der euklidischen Metrik abstandserhaltenden Abbildungen von $\mathbb{R}^n$) zu schreiben, $\mathbb{K} = \mathbb{R}^2/\Gamma$. (Hinweis: Γ kann als das Erzeugnis einer Translation und einer *Gleitspiegelung* gewählt werden.)

2.4.44 (a) $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\pm 1\}$ operiert auf $\mathbb{S}^n$ durch *Punktspiegelung* (am Zentrum),

$$\pm 1.x = \pm x.$$

Zeigen Sie, dass diese Wirkung eigentlich diskontinuierlich ist und $\mathbb{S}^n/\Gamma$ homöomorph zu $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $G = \mathbb{R}^*$ auf $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch *Homothetien* wie folgt operiert:

$$\lambda.x = \lambda x$$

($\lambda \in G$ und $x \in X$ sowie der skalaren Multiplikation auf der rechten Seite der Gleichung). Zeigen Sie, dass der Bahnenraum gerade $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ist.

2.4.45 Sei Γ eine endliche Gruppe (mit der diskreten Topologie), die frei auf einem topologischen Raum X operiert. Zeigen Sie, dass die Wirkung dann schon eigentlich diskontinuierlich ist.

2.4.46 Sei $p \in \mathbb{N}$ und $\Gamma = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega^p = 1\} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die Gruppe der *p-ten Einheitswurzeln*. Sei weiter $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu p und $1 \leq q < p$. Zeigen Sie, dass Γ wie folgt auf $X = \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ eigentlich diskontinuierlich operiert,

$$\omega.(z_1, z_2) = (\omega z_1, \omega^q z_2).$$

2.4.47 (a) Sei X ein zusammenhängender Raum und x_0 in X. Zeigen Sie, dass die Überlagerungen $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ als Objekte und den Überlagerungsmorphismen als Morphismen eine Kategorie $\mathcal{C}_{(X,x_0)}$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass die Morphismenmenge $\operatorname{Mor}((\tilde{X}, \tilde{x}_0)), (\tilde{X}', \tilde{x}'_0))$ höchstens einpunktig ist.

(c) Sei nun X auch noch lokal wegzusammenhängend und $\pi\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung mit $\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0) = (1)$. Zeigen Sie, dass dann $\pi\colon (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$ ein (initiales) universelles Objekt im Sinne von Aufgabe 2.4.22 ist.

2.4.48 Sei $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine einblättrige Überlagerung.

(a) Zeigen Sie, dass π ein Homöomorphismus sein muss.

(b) Zeigen Sie, dass π als Objekt in $\mathcal{C}_{(X,x_0)}$ (vgl. Aufgabe 2.4.47) isomorph zur Identität $\mathrm{id}\colon (X, x_0) \to (X, x_0)$ ist.

2.4.49 Sei G eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe sowie $\pi_1\colon G \to G/H$ und $\pi_2\colon G \to H\backslash G$ die kanonischen Projektionen von G auf die Menge der Linksnebenklassen G/H bzw. Rechtsnebenklassen $H\backslash G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, eine Bijektion $\bar{\varphi}\colon G/H \to H\backslash G$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$ induziert (vgl. Diagramm 2.53).

Abbildung 2.53: zum Index einer Untergruppe

2.4.50 Sei (X, x_0) ein punktierter, zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum und $f: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ ein Morphismus über (X, x_0). Zeigen Sie, dass f selbst eine Überlagerung ist.

2.4.51 Sei $\pi: \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $U \subseteq X$ eine gleichmäßig überlagerte, offene und wegzusammenhängende Umgebung von x_0. Sei nun weiter $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, $\gamma \in \mathrm{Homoeo}(\tilde{X})$ eine Decktransformation von π und $\tilde{x}_0' = \gamma(\tilde{x}_0)$. Seien schließlich $\tilde{U}, \tilde{U}' \subseteq \tilde{X}$ die Blätter über U, welche die Punkte $\tilde{x}_0$ bzw. $\tilde{x}_0'$ enthalten. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\tilde{U}' = \gamma(\tilde{U}).$$

2.4.52 Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann nennt man

$$N(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

den *Normalisator von* H.

(a) Zeigen Sie, dass $N(H) \subseteq G$ eine Untergruppe mit $N(H) \supseteq H$ von G ist, H ein Normalteiler in $N(H)$ und $N(H)$ die größte Untergruppe von G, in der H noch Normalteiler ist.

(b) Sei nun $\pi: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$. Zeigen Sie, dass für die Decktransformationsgruppe $\Gamma = \mathrm{Deck}(\tilde{X}, X)$ gilt:

$$\Gamma \cong N(H)/H.$$

2.4.53 Sei $j \in \mathbb{Z}$, G_j eine Gruppe und $\varphi_j: G_j \to G_{j+1}$ ein Homomorphismus, für alle j. Dann nennt man die *Sequenz*

$$\ldots \longrightarrow G_{j-1} \xrightarrow{\varphi_{j-1}} G_j \xrightarrow{\varphi_j} G_{j+1} \longrightarrow \ldots$$

exakt, wenn für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\operatorname{im}(\varphi_{j-1}) = \ker(\varphi_j).$$

(a) Zeigen Sie: Eine *kurze Sequenz*

$$1 \longrightarrow G' \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G'' \longrightarrow 1$$

ist genau dann exakt, wenn α injektiv, β surjektiv und $\operatorname{im}(\alpha) = \ker(\beta)$ ist. Wir nennen dann G eine *Erweiterung* von G'' um G'.

(b) Zeigen Sie nun: Ist $\pi\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine reguläre Überlagerung, so ist $\pi_1(X, x_0)$ eine Erweiterung von $\operatorname{Deck}(\tilde{X}, X)$ um $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$,

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \operatorname{Deck}(\tilde{X}, X) \longrightarrow 1.$$

2.4.54 Sei $n \in \mathbb{N}$. Der *komplex-projektive Raum* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ wird (ähnlich wie der reell-projektive Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (vgl. 1.2.13)) definiert als die Menge aller (komplexen) Geraden durch 0 im Vektorraum $\mathbb{C}^{n+1}$. Nimmt man den Nullpunkt jeder Geraden heraus, so erhält man eine Partition von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, deren Teile sich als die Bahnen unter der Gruppenwirkung $\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$\lambda.z = \lambda z \text{ (skalare Multiplikation)}$$

für $\lambda \in \mathbb{C}^*$ und $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ergeben. Es ist also $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ der Bahnenraum und wir geben ihm die Quotiententopologie,

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*.$$

Jede Äquivalenzklasse $p = [(z_0, \ldots, z_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ wird mit $(z_0 : \cdots : z_n)$ notiert und man spricht von den *homogenen Koordinaten* des Punktes p.

(a) Für jedes $j = 0, \ldots, n$ sei

$$U_j = \{(z_0 : \cdots : z_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : \ z_j \neq 0\}$$

und $\varphi_j\colon U_j \to \mathbb{C}^n$,

$$(z_0 : \cdots : z_n) \mapsto (\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}).$$

Zeigen Sie, dass φ_j wohldefiniert ist und ein Homöomorphismus für jedes $j = 0, \ldots, n$. (Der *Atlas* $(U_0, \ldots, U_n)$ macht $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ also damit zu einer $2n$-dimensionalen (topologischen) Mannigfaltigkeit.)

(b) Es operiere die *Kreisgruppe* $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$ vermöge
$$\lambda.z = \lambda z,$$
für $\lambda \in \mathbb{S}^1$ und $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ und damit, dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ kompakt ist.

(c) Zeigen Sie:
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^2.$$
(Hinweis: $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \dot\cup \{(0:1)\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (mit $\infty := (0:1)$), der *Riemannschen Zahlenkugel*.)

2.4.55 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ der projektive Raum der (komplexen) Dimension n und $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ die kanonische Projektion.

(a) Sei $\alpha: I \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ein Weg. Zeigen Sie, dass es einen Lift $\tilde\alpha: I \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ über π gibt.

(b) Zeigen Sie nun, dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ einfach zusammenhängend ist. (Hinweis: $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{2n+1}$ ist einfach zusammenhängend und die Fasern von π sind wegzusammenhängend.)

2.4.56 Zeigen Sie, dass alle höheren Homotopiegruppen von $\mathbb{S}^1$ trivial sind,
$$\pi_k(\mathbb{S}^1) = (0), \text{ für } k \geq 2.$$

2.4.57 Sei
$$\tilde X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{Z} \text{ oder } y \in \mathbb{Z}\}$$
und $\pi: (\tilde X, 0) \to (\mathbb{S}^1, \mathbf{1}) \vee (\mathbb{S}^1, \mathbf{1})$ gegeben durch $\pi(x,y) = i_1(\mathrm{ex}(x))$, wenn $y \in \mathbb{Z}$, und $\pi(x,y) = i_2(\mathrm{ex}(y))$, wenn $x \in \mathbb{Z}$ ist, wo $i_1, i_2: (\mathbb{S}^1, \mathbf{1}) \to (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, \mathbf{1})$ die natürlichen Inklusionen bezeichnen.

(a) Zeigen Sie, dass π eine Überlagerung ist.

(b) Bestimmen Sie die charakteristische Untergruppe $H \subseteq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, \mathbf{1})$ von π.

2.4.58 *(Analogon des Hauptsatzes der Galoistheorie).* Sei $\pi: (\tilde X, \tilde x_0) \to (X, x_0)$ eine reguläre Überlagerung. Wir nennen $\pi': (\tilde X', \tilde x_0') \to (X, x_0)$ eine *Teilüberlagerung* von π, wenn es einen Überlagerungsmorphismus $f: (\tilde X, \tilde x_0) \to (\tilde X', \tilde x_0')$ mit $\pi' \circ f = \pi$ gibt. Einer solchen Teilüberlagerung π' ordnen wir nun die Untergruppe $\Phi(\pi') := \Gamma' := \mathrm{Deck}(\tilde X, \tilde X')$ von $\Gamma := \mathrm{Deck}(\tilde X, X)$ zu und umgekehrt jeder Untergruppe Γ' von Γ die Teilüberlagerung $\Psi(\Gamma') = \pi'$, die von der kanonischen Projektion $f: \tilde X \to \tilde X/\Gamma' =: \tilde X'$ induziert wird.

(a) Zeigen Sie, dass Φ und Ψ invers zueinander sind.

(b) Zeigen Sie, dass π' genau dann regulär ist, wenn $\Gamma' = \Phi(\pi')$ ein Normalteiler von Γ ist.

2.4.59 (a) Zeigen Sie, dass ein unendliches Produkt von Kreislinien $X = \prod_{i\in I} \mathbb{S}^1$ (I eine unendliche Indexmenge) nicht semilokal einfach zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein unendliches Bukett von Kreislinien $Y = \bigvee_{i\in I} \mathbb{S}^1$ semilokal einfach zusammenhängend ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Raum

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$$

(vgl. Abbildung 2.43) nicht semilokal einfach zusammenhängend ist.

2.4.60 Skizzieren Sie die universelle Überlagerung der Acht $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

2.4.61 Sei $(G, \cdot)$ eine (lokal wegzusammenhängende, zusammenhängende) topologische Gruppe mit Einselement e und $\pi\colon \tilde{G} \to G$ eine Überlagerung. Sei $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. Zeigen Sie, dass es genau eine Gruppenstruktur $\tilde{\cdot}$ auf $\tilde{G}$ gibt, so dass $(\tilde{G}, \tilde{\cdot})$ zu einer topologischen Gruppe mit Einselement $\tilde{e}$ und π zu einem Homomorphismus (zwischen topologischen Gruppen) wird.

Kapitel 3

Homologie

3.1 Kettenkomplexe

Definition 3.1.1 Ein (nicht-negativer) *Kettenkomplex* besteht aus einer Familie abelscher Gruppen $C = (C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $C_k = (0)$ für $k < 0$ und einer Familie von Gruppenhomomorphismen $\partial = (\partial_k\colon C_k \to C_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ mit der Eigenschaft

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0,$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ (kurz: $\partial^2 = 0$),

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+2}} C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots .$$

Wir schreiben $(C, \partial) = (C_k, \partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, nennen $\partial = (\partial_k)$ den *Randoperator* von C und die Elemente von C_k die *k-Ketten* von C.

Definition 3.1.2 Eine *Kettenabbildung* $f\colon (C, \partial) \to (C', \partial')$ zwischen zwei Kettenkomplexen C und C' besteht aus einer Familie von Homomorphismen $(f_k\colon C_k \to C'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt (vgl. Diagramm 3.1):

$$\partial'_k \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k.$$

Definition 3.1.3 Sei (C, ∂) ein Kettenkomplex. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ nennen wir

$$Z_k(C) = \ker(\partial_k) \subseteq C_k$$

die *k-Zykeln* und

$$B_k(C) = \mathrm{im}(\partial_{k+1}) \subseteq C_k$$

die *k-Ränder* von (C, ∂). Wegen $\partial^2 = 0$ ist stets

$$B_k(C) \subseteq Z_k(C)$$

Abbildung 3.1: eine Kettenabbildung

(beides sind natürlich Untergruppen von C_k) und wir nennen die Quotientengruppe

$$H_k(C) := Z_k(C)/B_k(C)$$

die *k-te Homologiegruppe* von (C, ∂). Ihre Elemente

$$[z] = z + B_k(C),\ z \in Z_k(C)$$

heißen *Homologieklassen.*

Bemerkung 3.1.4 *Ist $f\colon (C,\partial) \to (C',\partial')$ eine Kettenabbildung, so bildet f Zykeln in Zykeln und Ränder in Ränder ab und induziert deshalb für jedes $k \in \mathbb{Z}$ einen Homomorphismus $f_* = H_k(f)\colon H_k(C) \to H_k(C')$ (für alle $k \in \mathbb{Z}$) durch*

$$f_*([z]) := [f_k(z)].$$

Beweis. Ist $z \in Z_k := Z_k(C)$, also $\partial_k z = 0$, so ist

$$\partial'_k(f_k z) = f_{k-1}(\partial_k z) = f_{k-1}(0) = 0,$$

also $f_k z \in Z_k(C')$. Ist $z \in B_k := B_k(C)$, also $z = \partial_{k+1} c$ für ein $c \in C_{k+1}$, so ist

$$f_k z = f_k \partial_{k+1} c = \partial'_{k+1}(f_{k+1} c),$$

also $f_k z \in B_k(C')$. Bezeichnen $\pi_k\colon Z_k(C) \to H_k(C)$ bzw. $\pi'_k\colon Z_k(C') \to H_k(C')$ die kanonischen Projektionen, so ist also $\pi'_k \circ (f_k|Z_k)(B_k) = 0$ und damit existiert genau ein Homomophismus $H_k(f) = f_*\colon H_k(C) \to H_k(C')$ mit $f_* \circ \pi_k = \pi'_k \circ f_k|Z_k$ (vgl. Diagramm 3.2), gegeben durch

$$f_*([z]) = [f_k z].$$

□

Abbildung 3.2: der induzierte Homomorphismus

Kommentar 3.1.5 (a) Die Kettenkomplexe zusammen mit den Kettenabbildungen und der Komposition

$$(g \circ f)_k := g_k \circ f_k$$

bilden eine Kategorie, die wir mit **KK** bzeichnen (siehe Aufgabe 3.4.1).

(b) Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist H_k ein Funktor von **KK** nach **Ab**,

$$H_k(\mathrm{id}) = \mathrm{id},\ \ H_k(gf) = H_k(g)H_k(f)$$

(siehe Aufgabe 3.4.1).

(c) Der Funktor H_k respektiert (endliche) Summen, insbesondere gilt:

$$H_k(C \oplus C') \cong H_k(C) \oplus H_k(C').$$

(siehe Aufgabe 3.4.2).

Definition 3.1.6 Sei $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein endliches oder unendliches Intervall (d.h.: $I = \tilde{I} \cap \mathbb{Z}$ für ein Intervall $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$). Eine Sequenz abelscher Gruppen $(A_q)_{q \in I}$ mit Homomorphismen $(f_q \colon A_q \to A_{q-1})$ ($q \in I$ so, dass $q-1 \in I$ ist),

$$\dots \xrightarrow{f_{q+2}} A_{q+1} \xrightarrow{f_{q+1}} A_q \xrightarrow{f_q} A_{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} \dots$$

heißt *exakt*, wenn an jeder Stelle $q \in I$, wo $q-1, q+1 \in I$ ist, gilt:

$$\mathrm{im}(f_{q+1}) = \ker(f_q).$$

Kommentar 3.1.7 (a) Ein Kettenkomplex (C, ∂) ist also genau dann exakt, wenn sämtliche Homologiegruppen verschwinden. Es ist stets

$$\operatorname{im}(\partial_{k+1}) \subseteq \ker(\partial_k)$$

und $H_k(C)$ ist gerade ein Maß für die Nicht-Exaktheit von (C, ∂) (an der Stelle k).

(b) Eine Sequenz $0 \to A \xrightarrow{f} B$ ist offenbar genau dann exakt, wenn f injektiv ist und eine Sequenz $A \xrightarrow{g} B \to 0$ ist exakt, genau wenn g surjektiv ist.

(c) Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

heißt eine *kurze exakte Sequenz*. Hier ist also f injektiv, g surjektiv und $\operatorname{im}(f) = \ker(g)$.

Beispiel 3.1.8 Seien A und B abelsche Gruppen und $A \oplus B$ ihre direkte Summe. Sei weiter $i\colon A \to A \oplus B$, $a \mapsto (a, 0)$, die natürliche Inklusion und $p\colon A \oplus B \to B$, $(a, b) \mapsto b$, die natürliche Projektion. Dann ist

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \oplus B \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

exakt.

Kommentar 3.1.9 Wir machen die kurzen exakten Sequenzen $0 \to A \to B \to C \to 0$ zu Objekten einer Kategorie, in dem wir als Morphismen Φ Tupel (f, g, h) von $0 \to A \to B \to C \to 0$ nach $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ definieren, wenn $f\colon A \to A'$, $g\colon B \to B'$ und $h\colon C \to C'$ Homomorphismen sind, so dass folgendes Diagramm (siehe 3.3) kommutiert.

Die Komposition von zwei Morphismen $\Phi = (f, g, h)$ und $\Psi = (f', g', h')$ wird natürlich als

$$\Psi \circ \Phi = (f' \circ, g' \circ g, h' \circ h)$$

definiert. Wir bezeichnen diese Kategorie der kurzen exakten Sequenzen mit **KES**.

Lemma 3.1.10 *(Fünferlemma). Seien $A_1, \ldots, A_5$ und $B_1, \ldots, B_5$ abelsche Gruppen, $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, $\beta_1, \ldots, \beta_4$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$ Homomorphismen, so dass die beiden Reihen des folgenden Diagramms (siehe 3.4) exakt sind und das Diagramm kommutiert.*

Dann gilt: Ist $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_5$ ein Isomorphismus, so auch γ_3.

Abbildung 3.3: ein Morphismus zwischen zwei kurzen exakten Seuenzen

Abbildung 3.4: zum Fünferlemma

Beweis. Injektivität: Sei also $a_3 \in A_3$ mit $\gamma_3(a_3) = 0$. Zu zeigen ist, dass $a_3 = 0$ sein muss. Wegen $\gamma_4 \circ \alpha_3(a_3) = \beta_3 \circ \gamma_3(a_3) = 0$ und der Injektivität von γ_4 folgt: $\alpha_3(a_3) = 0$. Die Exaktheit der ersten Reihe bei A_3 impliziert dann die Existenz eines $a_2 \in A_2$ mit $a_3 = \alpha_2(a_2)$. Wegen

$$\beta_2(\gamma_2(a_2)) = \gamma_3(\alpha_2(a_2)) = \gamma_3(a_3) = 0$$

und der Exaktheit bei B_2, existiert ein $b_1 \in B_1$ mit $\beta_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Die Surjektivität von γ_1 liefert schließlich ein $a_1 \in A_1$ mit $\gamma_1(a_1) = b_1$. Es ist dann

$$\gamma_2(a_2 - \alpha_1(a_1)) = \gamma_2(a_2) - \beta_1 \circ \gamma_1(a_1) = 0,$$

also implziert die Injektivität von γ_2: $a_2 = \alpha_1(a_1)$. Es folgt:

$$a_3 = \alpha_2(a_2) = \alpha_2 \circ \alpha_1(a_1) = 0.$$

Surjektivität: Sei $b_3 \in B_3$ beliebig. Da γ_4 surjektiv ist, existiert zunächst ein $a_4 \in A_4$ mit $\gamma_4(a_4) = \beta_3(b_3)$. Es ist dann

$$\gamma_5(\alpha_4(a_4)) = \beta_4 \circ \gamma_4(a_4) = \beta_4 \circ \beta_3(b_3) = 0$$

und die Injektivität von γ_5 liefert daher: $\alpha_4(a_4) = 0$. Die Exaktheit bei A_4 liefert deshalb ein $\tilde{a}_3 \in A_3$ mit $\alpha_3(\tilde{a}_3) = a_4$. Es ist nun

$$\beta_3(b_3 - \gamma_3(\tilde{a}_3)) = \beta_3(b_3) - \gamma_4 \circ \alpha_3(\tilde{a}_3) = 0,$$

also existiert ein $b_2 \in B_2$ mit $\beta_2(b_2) = b_3 - \gamma_3(\tilde{a}_3)$. Sei $a_2 \in A_2$ das Urbild von b_2 unter γ_2, $\gamma_2(a_2) = b_2$. Setze nun: $a_3 := \tilde{a}_3 + \alpha_2(a_2)$. Dann ist

$$\gamma_3(a_3) = \gamma_3(\tilde{a}_3) + \gamma_3 \circ \alpha_2(a_2) = b_3 - \beta_2 \circ \gamma_2(a_2) + \gamma_3 \circ \alpha_2(a_2) = b_3.$$

□

Definition 3.1.11 Man sagt, dass eine kurze exakte Sequenz

$$(*) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

spaltet, wenn es ein Rechtsinverses von g gibt, d.h. einen Homomorphismus $r\colon C \to B$ mit $g \circ r = \mathrm{id}_C$. ($r$ heißt dann auch eine *Spaltung* von $(*)$.)

Bemerkung 3.1.12 *Für eine kurze exakte Sequenz* $(*)$ *sind äquivalent:*

(a) $(*)$ *spaltet;*

(b) f *hat ein Linksinverses* $q\colon B \to A$, *d.h.:* $q \circ f = \mathrm{id}_A$;

(c) es gibt einen Isomorphismus Φ *von* $(*)$ *zur Sequenz* $0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C \to 0$.

Beweis. (a)⇒(b): Da f injektiv ist, folgt: $f\colon A \to f(A) \subseteq B$ ist ein Isomorphismus. Sei $f^{-1}\colon f(A) \to A$ sein Inverses. Für alle $b \in B$ ist $b - r \circ g(b) \in f(A)$, denn

$$g(b - r \circ g(b)) = g(b) - g \circ r(g(b)) = g(b) - \mathrm{id}(g(b) = 0,$$

also ist $b - r \circ g(b) \in \ker(g) = \mathrm{im}(f)$. Setze nun $q\colon B \to A$,

$$q(b) := f^{-1}(b - r \circ g(b)).$$

Dann ist

$$q \circ f(a) = f^{-1}(f(a) - r \circ g \circ f(a)) = a = \mathrm{id}(a),$$

für alle $a \in A$.

(b)⇒(c): Setze $\beta\colon B \to A \oplus C$, $\beta(b) = (q(b), g(b))$ und $\Phi := (\mathrm{id}_A, \beta, \mathrm{id}_C)$. Dann ist Φ ein Morphismus von $(*)$ nach $0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C \to 0$, denn

$$\beta \circ f = (q \circ f, g \circ f) = (\mathrm{id}, 0) = i \circ \mathrm{id}$$

und

$$p \circ \beta = p \circ (q, g) = g = \mathrm{id} \circ g$$

(siehe Diagramm 3.5).

Abbildung 3.5: ein Isomorphismus zwischen spaltenden Sequenzen

Weil id_A und id_C (und id_0) Isomorphismen sind, folgt mit dem Fünferlemma, dass auch β ein Isomorphismus und damit auch Φ ein Isomorphismus ist.

(c)⇒(a): Sei $\Phi = (\alpha, \beta, \gamma)$ ein Isomorphismus von $(*)$ nach $0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C \to 0$. Setze dann $r: C \to B$,

$$r(c) := \beta^{-1}(0, \gamma(c))$$

(wo nun $\Phi^{-1} = (\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \gamma^{-1})$ ist). Dann ist

$$\gamma \circ (g \circ r) = p \circ \beta \circ r = p \circ (0, \gamma) = \gamma$$

und die Injektivität von γ liefert $g \circ r = \mathrm{id}_C$. □

Beispiel 3.1.13 (a) Ist C in $(*)$ eine *frei abelsche Gruppe*, d.h. $C = F(X)$ für eine Menge X (siehe Aufgabe 3.4.3), so existiert stets eine Spaltung $r: C \to B$. Wähle nämlich für jedes $x \in X$ ein Urbild $b_x \in B$ von $i(x) = 1 \cdot x \in C$ unter g. Dann existiert (genau) ein Homomorphismus $r: C \to B$ mit $r(1 \cdot x) = b_x$ (universelle Eigenschaft von $i: X \to F(X)$, siehe Aufgabe 3.4.3). Es ist dann $g \circ r = \mathrm{id}_C$ zunächst auf den Erzeugern $i(x) \in C$, aber damit dann auch auf ganz C, d.h.: r ist eine Spaltung von $(*)$.

(b) Die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

spaltet offenbar nicht, denn es gibt keinen nicht-trivialen Homomorphismus von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$.

Kommentar 3.1.14 Wir erweitern nun den Begriff von Kern, Bild und exakten Sequenzen in naheliegender Weise von abelschen Gruppen wie folgt auf Kettenkomplexe:

(a) Sei $C = (C_k, \partial_k)$ ein Kettenkomplex. Wir sagen, dass $D = (D_k)$ ein *Unterkomplex* von C ist, wenn $D_k \subseteq C_k$ eine Untergruppe und $\partial D_k \subseteq D_{k-1}$ ist, für alle $k \in \mathbb{Z}$. $(D_k, \partial | D_k)$ ist dann selbst ein Kettenkomplex.

(b) Sei $f: C \to C'$ eine Kettenabbildung. Dann ist $\ker(f) := (\ker(f_k))$ ein Unterkomplex von C, denn

$$f_{k-1}(\partial_k(\ker f_k)) = \partial_{k-1}(f_k(\ker f_k)) = \partial_{k-1}(0) = (0),$$

also $\partial_k(\ker f_k) \subseteq \ker f_{k-1}$. Er heißt der *Kern* von f.

(c) Sei $f: C \to C'$ eine Kettenabbildung. Dann ist $\mathrm{im} f := (\mathrm{im} f_k) \subseteq C$ ein Unterkomplex, denn ist $c' \in \mathrm{im} f_k$, also $c' = f_k c$ für ein $c \in C_k$, so ist

$$\partial'_k c' = \partial'_k f_k c = f_{k-1}(\partial_k c) \in \mathrm{im}(f_{k-1}).$$

Er heißt das *Bild* von f.

Abbildung 3.6: ein Morphismus zwischen kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen

(d) Eine Sequenz $\ldots \to C_q \overset{f_q}{\to} C_{q-1} \overset{f_{q-1}}{\to} C_{q-2} \to \ldots$ von Kettenabbildungen heißt *exakt*, wenn $\mathrm{im} f_q = \ker f_{q-1}$ ist, für alle q.

(e) Eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen der Form

$$(*) \quad 0 \longrightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \longrightarrow 0$$

heißt eine *kurze exakte Sequenz*. Sie bilden die Objekte einer Kategorie $\mathbf{KES} - \mathbf{KK}$, deren Morphismen aus Tupeln $(\alpha', \alpha, \alpha'')$ besteht, so dass das Diagramm 3.6 kommutiert. Hierbei sind $\alpha', \alpha, \alpha''$ natürlich Kettenabildungen.

Satz 3.1.15 *Sei $0 \to C' \overset{f}{\to} C \overset{g}{\to} C'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen und $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

(a) Für jedes $[z''] \in H_k(C'')$ besteht die Menge

$$f_{k-1}^{-1}(\partial_k(g_k^{-1}([z'']))) \subseteq C'_{k-1}$$

aus genau einer Homologieklasse $[z'] \subseteq Z_{k-1}(C')$.

(b) Setzt man $(\partial_*)_k \colon H_k(C'') \to H_{k-1}(C')$,

$$(\partial_*)_k([z'']) = f_{k-1}^{-1}(\partial_k(g_k^{-1}([z'']))),$$

so ist $(\partial_*)_k$ ein Homomorphismus zwischen abelschen Gruppen.

Definition 3.1.16 Der in obigem Satz definierte Homomorphismus $(\partial_*)_k\colon H_k(C'') \to H_{k-1}(C')$ heißt der *verbindende Homomorphismus* zu $(*)$.

Beweis von 3.1.15 (siehe auch Diagramm 3.7): (a) Sei $z'' \in Z''_k := Z_k(C'')$ beliebig.

Behauptung:

$$f_{k-1}^{-1}(\partial_k(g_k^{-1}([z'']))) \subseteq C'_{k-1}$$

ist nicht leer und liegt in $Z'_k := Z_{k-1}(C')$.

Dazu: Da g_k surjektiv ist, existiert ein $c \in C_k$ mit $g_k c = z''$. Es ist

$$g_{k-1}(\partial_k c) = \partial''_k(g_k c) = \partial''_k z'' = 0,$$

denn $z'' \in Z''_k$. Wegen der Exaktheit von $(*)$ bei C existiert ein $z' \in C'_{k-1}$ mit $f_{k-1} z' = \partial_k c$, also $z' \in f_{k-1}^{-1}(\partial_k(g_k^{-1}([z''])))$. Für jedes solche $z' \in C'_{k-1}$ gilt aber zudem:

$$f_{k-2}(\partial'_{k-1} z') = \partial_{k-1}(f_{k-1} z') = \partial_{k-1}\partial_k c = 0,$$

also wegen der Injektivität von f_{k-2} auch $\partial'_{k-1} z' = 0$, d.h.:

$$\emptyset \neq f_{k-1}^{-1}(\partial_k(g_k^{-1}([z'']))) \subseteq Z'_{k-1}.$$

Abbildung 3.7: der verbindende Homomorphismus

Behauptung: $f_{k-1}^{-1}(\partial_k(g_k^{-1}([z'']))) \subseteq Z'_{k-1}$ ist genau eine Homologieklasse.

Dazu: Seien $z'' \in Z''_k$, $c \in g_k^{-1}(z'')$ und $z' \in Z'_{k-1}$ mit $f_{k-1}(z') = \partial_k c$ gegeben sowie $c' \in C'_k$ beliebig. Dann ist auch $c + f_k c' \in g_k^{-1}(z'')$, denn $g_k \circ f_k = 0$. Schließlich ist

$$f_{k-1}(z' + \partial'_k c') = f_{k-1} z' + \partial_k f_k c' = \partial_k c + \partial_k f_k c' = \partial_k(c + f_k c'),$$

also auch $z' + \partial'_k c' \in f_{k-1}^{-1}(\partial_k(g_k^{-1}([z''])))$.

Umgekehrt: Seien $z''_1, z''_2 \in Z''_k$ mit $[z''_1] = [z''_2]$ und $z'_1 \in f_k^{-1}\partial_k g_k^{-1}(z''_1)$, $z'_2 \in f_k^{-1}\partial_k g_k^{-1}(z''_2)$. Es existieren dann also $c_1, c_2 \in C_k$ mit $g_k c_1 = z''_1$, $g_k c_2 =$

z_2'' und $f_{k-1}z_1' = \partial_k c_1$, $f_{k-1}z_2' = \partial_k c_2$ und es existiert ein $c'' \in C'_{k+1}$ mit $\partial''_{k+1}c'' = z_2'' - z_1''$. Sei schließlich $c \in C_{k+1}$ mit $g_{k+1}c = c''$. Dann ist

$$g_k(\partial_{k+1}c - (c_2 - c_1)) = \partial''_{k+1}g_{k+1}c - (z_2'' - z_1'') = \partial''_{k+1}c'' - (z_2'' - z_1'') = 0.$$

Also existiert ein $c' \in C'_k$ mit $f_k c' = \partial_{k+1}c - (c_2 - c_1)$. Nun folgt:

$$\begin{aligned} f_{k-1}\partial'_k c' &= \partial_k f_k(c') = \partial_k(\partial_{k+1}c - (c_2 - c_1)) = \partial_k c_2 - \partial_k c_1 \\ &= f_{k-1}(z_2' - z_1'). \end{aligned}$$

Da f_{k-1} injektiv ist, folgt schließlich: $z_2' - z_1' = \partial_k c'$, also sind z_1' und z_2' in der gleichen Homologieklasse.

Es ist also nun $(\partial_*)_k \colon H_k(C'') \to H_{k-1}(C')$,

$$(\partial_*)_k([z'']) = f_{k-1}^{-1}\partial_k g_k^{-1}([z''])$$

wohldefiniert.

(b) Seien nun $z_1'', z_2'' \in Z_k''$ beliebig und $c_1, c_2 \in C_k$ mit $g_k c_1 = z_1''$, $g_k c_2 = z_2''$. Für $c := c_1 + c_2$ gilt dann $g_k c = z_1'' + z_2''$, d.h.: man darf c für die Wahl eines Repräsentanten für die Homologieklasse $\partial_*([z_1'' + z_2''])$ verwenden. Es ist nun für das $z' \in Z'_{k-1}$ mit $f_{k-1}z' = \partial_k c$ (also $[z'] = \partial_*([z_1''] + [z_2''])$):

$$f_{k-1}(z' - (z_1' + z_2')) = c - (c_1 + c_2) = 0,$$

wo $f_{k-1}z_1' = c_1$ und $f_{k-1}z_2' = c_2$ (also $[z_1'] = \partial_*([z_1''])$ und $[z_2'] = \partial_*([z_2''])$) sei. Wegen der Injektivität von f_{k-1} folgt deshalb $z' = z_1' + z_2'$ und damit

$$\begin{aligned} \partial_*([z_1''] + [z_2'']) &= [z'] = [z_1' + z_2'] = [z_1'] + [z_2'] \\ &= \partial_*([z_1'']) + \partial_*([z_2'']), \end{aligned}$$

also ∂_* ein Homomorphismus. □

Satz 3.1.17 *(Die lange Homologiesequenz). Sei* $0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann ist die folgende (lange) Sequenz abelscher Gruppen exakt:*

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_k(C') \xrightarrow{f_*} H_k(C) \xrightarrow{g_*} H_k(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(C') \xrightarrow{f_*} \ldots\ .$$

Beweis. Die Exaktheit der langen Sequenz muss bei $H_k(C')$, $H_k(C)$ und $H_k(C'')$ (für alle $k \in \mathbb{Z}$) geprüft werden.

Bei $H_k(C')$: (i) Sei $z'' \in Z_{k+1}$ (also $[z''] \in H_{k+1}(C'')$ beliebig). Dann ist

$$f_*\partial_*([z'']) = f_*(f_k^{-1}\partial_{k+1}g_{k+1}^{-1}([z''])) = [\partial_{k+1}c] = 0$$

Abbildung 3.8: eine Kettenhomotopie

für ein $c \in g_{k+1}^{-1}([z''])$, also $\mathrm{im}\partial_* \subseteq \ker f_*$.

(ii) Sei $z' \in Z'_k$ beliebig mit $f_*([z']) = 0$ (also $[z'] \in \ker f_*$ beliebig). Dann ist also $f_k z' \in B_k$, also existiert ein $c \in C_{k+1}$ mit $f_k z' = \partial_{k+1} c$. Setze $z'' := g_{k+1} c \in C''_{k+1}$. Dann ist:

$$\partial''_{k+1} z'' = \partial''_{k+1} g_{k+1} c = g_k \partial_{k+1} c = g_k \circ f_k(z') = 0,$$

also $z'' \in Z_{k+1}$. Schließlich ist

$$\partial_*([z'']) = f_k^{-1} \partial_{k+1} g_{k+1}^{-1}([z'']) = [f_k^{-1}(\partial_{k+1} c)] = [z'],$$

also $\ker f_* \subseteq \mathrm{im}\partial_*$.

Insgesamt gilt also: $\mathrm{im}\partial_* = \ker f_*$.

Für die Exaktheit der langen Sequenz bei $H_k(C)$ und $H_k(C'')$ siehe Aufgabe 3.4.4. □

Kommentar 3.1.18 Fasst man die langen exakten Sequenzen abelscher Gruppen als Objekte einer Kategorie **LES** (mit den naheliegenden Morphismen) auf, so ist das „Lange-Exakte-Homologiesequenz-Nehmen" ein Funktor von **KES** − **KK** nach **LES** (vgl. Aufgabe 3.4.5).

Definition 3.1.19 Seien C und C' Kettenkomplexe. Zwei Kettenabbildungen $f, g\colon C \to C'$ heißen *kettenhomotop*, wenn es eine Familie $D = (D_k)$ von Homomorphismen $D_k\colon C_k \to C_{k+1}$ gibt, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt (vgl. Diagramm 3.8):

$$\partial'_{k+1} \circ D_k + D_{k-1} \circ \partial_k = g_k - f_k.$$

Wir nennen dann D eine *Kettenhomotopie* zwischen f und g und schreiben $D\colon f \simeq g$ (oder $f \overset{D}{\simeq} g$).

Bemerkung 3.1.20 *Sind $f, g\colon C \to C'$ kettenhomotop, so stimmen die induzierten Homomorphismen $f_*, g_*\colon H_k(C) \to H_k(C')$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ überein, $f_* = g_*$.*

Beweis. Für $z \in Z_k$ ist

$$g_k z - f_k z = \partial'_{k+1} D_k z + D_{k-1} \partial_k z = \partial'_{k+1}(D_k z) \in B'_k,$$

also $[f_k z] = [g_k z]$ und damit

$$f_*([z]) = [f_k z] = [g_k z] = g_*([z]),$$

für alle $[z] \in H_k(C)$ und $k \in \mathbb{Z}$. □

Kommentar 3.1.21 (a) Definiert man eine Homotopievariante **HKK** der Kategorie **KK** dadurch, dass man die gleichen Objekte wie in **KK**, aber als Morphismen die (Ketten-) Homotopieklassen von Kettenabbildungen nimmt, so faktorisiert (für jedes $k \in \mathbb{Z}$) H_k: **KK** $\to$ **Ab** über $\simeq$: **KK** $\to$ **HKK** (vgl. 2.2.29 und Aufgabe 2.4.27) wegen 3.1.20 (vgl. Diagramm 3.9).

Abbildung 3.9: die Homotopiefaktorisierung von H_k

(b) Man nennt eine Kettenabbildung $f\colon C \to C'$ eine *(Ketten-) Äquivalenz*, wenn es eine Kettenabbildung $g\colon C' \to C$ gibt mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_C$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{C'}$. Es heißen dann C und C' (ketten-) homotopieäquivalent, $C \simeq C'$. Es folgt also:

$$C \simeq C' \;\Rightarrow\; H_k(C) \cong H_k(C'),\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Vorbereitung 3.1.22 Sei C ein Kettenkomplex und seien $C', C'' \subseteq C$ Unterkomplexe.

(a) Dann ist der *Durchschnitt* $C' \cap C'' \subseteq C$ mit

$$(C' \cap C'')_k := C'_k \cap C''_k$$

und die *(innere) Summe* $C' + C'' \subseteq C$ mit

$$(C' + C'')_k := C'_k + C''_k \subseteq C_k$$

ein Unterkomplex von C.

(b) Da C' und C'' selbst Kettenkomplexe sind, kann man auch die (äußere) Summe $C' \oplus C''$ in der Kategorie **KK** bilden. Seien $i' \colon C' \to C' \oplus C''$, $i'' \colon C'' \to C' \oplus C''$ die kanonischen Inklusionen und $j' \colon C' \to C' + C'' \subseteq C$, $j'' \colon C'' \to C' + C'' \subseteq C$ die Inklusionen von C', C'' in $C' + C''$. Die universelle Eigenschaft von $(C' \oplus C'', i', i'')$ liefert genau eine Kettenabbildung $\Phi \colon C' \oplus C'' \to C' + C''$ mit $\Phi \circ i' = j'$ und $\Phi \circ i'' = j''$, nämlich

$$\Phi(c', c'') = c' + c''.$$

Definition 3.1.23 Sei C ein Kettenkomplex. Ein Paar (C', C'') von Unterkomplexen $C', C'' \subseteq C$ heißt ein *Ausschneidungspaar* von C, wenn die Inklusion $\iota \colon C' + C'' \to C$ einen Isomorphismus in der Homologie induziert,

$$\iota_* \colon H_k(C' + C'') \xrightarrow{\cong} H_k(C),$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 3.1.24 *(von Mayer-Vietoris). Sei C ein Kettenkomplex und (C', C'') ein Ausschneidungspaar von C. Dann existiert eine lange, exakte Sequenz von Homologiegruppen*

$$\ldots \xrightarrow{\nu} H_{k+1}(C) \xrightarrow{\Delta} H_k(C' \cap C'') \xrightarrow{\mu} H_k(C') \oplus H_k(C'') \xrightarrow{\nu} H_k(C) \xrightarrow{\Delta} \ldots$$

(so genannte Mayer-Vietoris-Sequenz).

Beweis. Man betrachte die folgende Sequenz von Kettenkomplexen:

$$(*) \quad 0 \longrightarrow C' \cap C'' \xrightarrow{f} C' \oplus C'' \xrightarrow{g} C' + C'' \longrightarrow 0$$

mit

$$f(c) = (c, -c), \quad g(c', c'') = c' + c''.$$

Es ist f injektiv, g surjektiv, $g \circ f = 0$ und für $(c', c'') \in \ker(g)$ ist $c' = -c''$, also $c := c' \in C' \cap C''$ und $(c', c'') = f(c)$. Also ist $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$ und damit $(*)$ exakt.

Sei nun weiter

$$\varphi_k\colon H_k(C' \oplus C'') \to H_k(C') \oplus H_k(C'')$$

der natürliche Isomorphismus (vgl. Aufgabe 3.4.2), d.i:

$$\varphi_k([(z', z'')]) = ([z'], [z'']).$$

Sei schließlich

$$\psi_k\colon H_k(C' + C'') \to H_k(C)$$

der von dem Ausschneidungspaar induzierte Isomorphismus. Setze nun:

$$\begin{aligned}
\Delta_k &:= (\partial_*)_k \circ \psi_k^{-1}\colon H_k(C) \to H_{k-1}(C' \cap C''),\\
\mu_k &:= \varphi_k \circ f_*\colon H_k(C' \cap C'') \to H_k(C') \oplus H_k(C''),\\
\nu_k &:= \psi_k \circ g_* \circ \varphi_k^{-1}\colon H_k(C') \oplus H_k(C'') \to H_k(C),
\end{aligned}$$

wo $(\partial_*)_k$ der verbindende Homomorphismus der Sequenz $(*)$ sei. Dann hat man die folgende Abbildung zwischen langen Sequenzen (siehe Diagramm 3.10).

Abbildung 3.10: die Mayer-Vietoris-Sequenz

Dabei sind die vertikalen Homomorphismen alle Isomorphismen, das Diagramm kommutiert und die obere Sequenz ist nach 3.1.17 exakt. Daraus folgt, dass auch die untere Sequenz exakt ist (und $(\ldots, \mathrm{id}, \varphi_k, \psi_k, \ldots)$ ein Isomorphismus in **LES** ist). $\square$

3.2 Die singulären Homologiegruppen

Definition 3.2.1 Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $(e_0, \ldots, e_k)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{k+1}$,

$$e_i = (\delta_{0i}, \ldots, \delta_{ki}), (i = 0, \ldots, k).$$

Das *k-dimensionale Standardsimplex* ist der Teilraum (mit der von der Standard-Topologie auf $\mathbb{R}^{k+1}$ induzierten Topologie)

$$\begin{aligned} \Delta_k \quad := \quad & \{x = (x_0, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1} : \ 0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 0, \ldots, k) \\ & \text{und } \sum_{i=0}^{k} x_i = 1\}. \end{aligned}$$

Kommentar 3.2.2 (a) Es hat also jedes $x \in \Delta_k$ eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i e_i \quad \text{mit} \ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$$

(denn $(e_0, \ldots, e_k)$ ist eine Basis, $\lambda_i = x_i$, $i = 0, \ldots, k$).

Abbildung 3.11: die Standard-Simplexe in Dimension $k = 0, 1, 2$

(b) Die der Ecke $e_i \in \Delta_k$ $(i = 0, \ldots, k)$ gegenüber liegende Seite wird mit

$$\Delta_{k-1}^i = \{x \in \Delta_k : \ x = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j e_j, \ \lambda_i = 0\}$$

bezeichnet. Ferner beschreibe

$$\delta_{k-1}^i \colon \Delta_{k-1} \to \Delta_{k-1}^i \subseteq \Delta_k$$

den Homöomorphismus, der durch Einschränkung der linearen Abbildung $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k+1}$ auf $\Delta_{k-1} \subseteq \mathbb{R}^k$ gegeben ist, die

$$e_j \mapsto \begin{cases} e_j & \text{für} \quad j = 0, \dots, i-1 \\ e_{j+1} & \text{für} \quad j = i, \dots, k-1 \end{cases}$$

erfüllt.

Lemma 3.2.3 *Für $k \in \mathbb{N}$ mir $k \geq 2$ und alle $0 \leq i < j \leq k$ gilt:*

$$\delta^j_{k-1} \circ \delta^i_{k-2} = \delta^i_{k-1} \circ \delta^{j-1}_{k-2}.$$

Beweis. Sei $f := \delta^j_{k-1} \circ \delta^i_{k-2}$ und $g := \delta^i_{k-1} \circ \delta^{j-1}_{k-2}$. Es sind f und g Einschränkungen linearer Abbildungen $\mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{k+1}$. Es reicht also $f(e_l) = g(e_l)$ für $l = 0, \dots, k-2$ zu zeigen.

- Für $0 \leq l < i$ ist $f\colon e_l \overset{\delta^i_{k-2}}{\mapsto} e_l \overset{\delta^j_{k-1}}{\mapsto} e_l$ und $g\colon e_l \mapsto e_l \mapsto e_l$ auch, denn $j - 1 \geq i$;
- für $i \leq l < j-1$ ist $f\colon e_l \mapsto e_{l+1} \mapsto e_{l+1}$, weil $l+1 < j$ ist und $g\colon e_l \mapsto e_l \mapsto e_{l+1}$;
- für $j-1 \leq l \leq k-2$ ist schließlich $f\colon e_l \mapsto e_{l+1} \mapsto e_{l+2}$ und auch $g\colon e_l \mapsto e_{l+1} \mapsto e_{l+2}$.

□

Erinnerung 3.2.4 Sei M eine Menge. Dann ist $F(M)$ die *frei abelsche Gruppe über* M,

$$F(M) = \{\sum_{x \in M} n_x x : \ n_x \in \mathbb{Z}, \ n_x = 0 \text{ für fast alle } x \in M\}$$

und erfüllt zusammen mit $i\colon M \to F(M)$, $x \mapsto 1 \cdot x$, die folgende *universelle Eigenschaft*: Zu jedem Paar (A, j) bestehend aus einer abelschen Gruppe A und einer Abbildung $j\colon M \to A$, gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi\colon F(M) \to A$ mit $\Phi \circ i = j$ (vgl. Aufgabe 3.4.3).

Definition 3.2.5 Sei X ein topologischer Raum, $k \in \mathbb{N}_0$ und Δ_k das Standard-Simplex der Dimension k.

(a) Ein *singuläres k-Simplex in* X ist eine stetige Abbildung $\sigma\colon \Delta_k \to X$. Die Menge aller singulären k-Simplexe in X wird mit $\Sigma_k(X)$ bezeichnet,

$$\Sigma_k(X) = \mathcal{C}(\Delta_k, X).$$

(b) Sei

$$S_k(X) := F(\Sigma_k(X))$$

($S_k(X) := (0)$ für $k < 0$) die von den singulären k-Simplexen erzeugte frei abelsche Gruppe. Ihre Elemente

$$c = \sum_{\sigma \in \Sigma_k(X)} n_\sigma \sigma$$

heißen *singuläre k-Ketten in X*.

(c) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definiert man den *Randoperator* $\partial_k \colon S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ auf den Erzeugern $\sigma \in \Sigma_k(X)$ durch

$$\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma \circ \delta_{k-1}^i.$$

und setzt dann ∂_k (mit der universellen Eigenschaft) eindeutig zu einem Homomorphismus auf $S_k(X)$ fort. ($\partial_k = 0$ für $k \leq 0$.)

Abbildung 3.12: der Randoperator auf einem singulären 2-Simplex

Bemerkung 3.2.6 *Die Familie $S(X) = (S_k(X), \partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist ein Kettenkomplex. Es gilt also für alle $k \in \mathbb{Z}$:*

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0.$$

Beweis. Sei $k \geq 2$ und $\sigma \in \Sigma_k(X)$ beliebig. Es reicht zu zeigen, dass $\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma) = 0$ ist. Nach Definition ist

$$\partial_{k-1}\partial_k(\sigma) \;=\; \partial_{k-1}\Big(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sigma \delta_{k-1}^j\Big) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sigma \delta_{k-1}^j \delta_{k-2}^i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{i+j}\sigma(\delta^j_{k-1}\delta^i_{k-2}) + \sum_{0\le j\le i\le k-1} (-1)^{i+j}\sigma(\delta^j_{k-1}\delta^i_{k-2}) \\
&= \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{i+j}\sigma(\delta^i_{k-1}\delta^{j-1}_{k-2}) + \sum_{0\le j\le i\le k-1} (-1)^{i+j}\sigma(\delta^j_{k-1}\delta^i_{k-2})
\end{aligned}
$$

nach 3.2.3. Wir ersetzen nun im 1. Summanden den Index j durch $j+1$ und vertauschen im 2. Summanden die Bezeichnungen für die Indizes (vgl. Abbildung 3.13). Dann ist

$$
\begin{aligned}
\partial_{k-1}\partial_k(\sigma) &= \sum_{0\le i\le j\le k-1} (-1)^{i+j+1}\sigma(\delta^i_{k-1}\delta^j_{k-2}) + \sum_{0\le i\le j\le k-1} (-1)^{j+i}\sigma(\delta^i_{k-1}\delta^j_{k-2}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

Abbildung 3.13: $(i,j) \to (j-1,i)$ für $0 \le i < j \le k$

Kommentar 3.2.7 (a) Wir nennen $C = S(X)$ den *singulären Kettenkomplex* von X. Entsprechend heißen die Elemente von $Z_k(X) := Z_k(S(X))$ *singuläre Zykeln* auf X und die von $B_k(X) := B_k(S(X))$ *singuläre Ränder* auf X. Schließlich heißt

$$H_k(X) := H_k(S(X))$$

die *k-te (singuläre) Homologiegruppe* von X. Sie ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe. (Natürlich ist $H_k(X) = (0)$ für $k < 0$.)

(b) Während $C_k = S_k(X) = F(\Sigma_k(X))$ i.A. eine ungeheuer große Gruppe ist und auch $Z_k(X)$, hofft man, dass auch $B_k(X)$ so groß ist, dass $H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$ genau das tut, was man wünscht, nämlich die k-dimensionalen Löcher von X zu detektieren!

(c) Es ist erstaunlich, dass man an die Erzeuger $\sigma \in \Sigma_k(X)$ keine weiteren Voraussetzungen zu machen braucht (etwa, dass σ eine Einbettung ist), als die bloße Stetigkeit, um eine nicht-triviale Theorie zu bekommen, die das leistet, was man sich vorstellt, z.B. $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$, aber $H_k(\mathbb{S}^n) = (0)$ für $1 \leq k \leq n-1$ (siehe 3.3.1).

(d) Wir machen $S\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{KK}$ (nicht mit der Einhängung $S\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ zu verwechseln) wie folgt zu einem Funktor: Ist $f\colon X \to Y$ stetig, so sei $f_* = Sf\colon S(X) \to S(Y)$, $Sf = (S_k f)$, auf singulären k-Simplexen gegeben durch
$$S_k f(\sigma) = f \circ \sigma.$$
Es ist dann $Sf\colon S(X) \to S(Y)$ tatsächlich eine Kettenabbildung, denn für alle $k \in \mathbb{N}$ und allen $\sigma \in \Sigma_k(X)$ ist
$$\begin{aligned} \partial_k^Y S_k f(\sigma) &= \partial_k^Y(f\sigma) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i f\sigma\delta_{k-1}^i = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i S_{k-1}f(\sigma\delta_{k-1}^i) \\ &= S_{k-1}f(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma\delta_{k-1}^i) = S_{k-1}f\partial_k^X(\sigma). \end{aligned}$$
Damit ist $H_k \circ S\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ ein Funktor ($k \in \mathbb{N}_0$, Kompositionen von Funktoren sind wieder Funktoren), insbesondere sind zwei topologische Räume X und Y nicht homöomorph, wenn $H_k(X)$ und $H_k(Y)$ (für ein $k \in \mathbb{N}_0$) nicht isomorph sind.

Bemerkung 3.2.8 *Sei $X = \mathrm{pt}$ der einpunktige Raum. Dann ist $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ und $H_k(X) = (0)$ für $k \geq 1$.*

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es nur ein singuläres k-Simplex: das konstante $\sigma_k\colon \Delta_k \to \mathrm{pt}$. Sein Rand ist
$$\begin{aligned} \partial_k\sigma_k &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_k \circ \delta_{k-1}^i = \left(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\right)\sigma_{k-1} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ \sigma_{k-1} & \text{für } k \text{ gerade und } k \geq 2 \end{cases}, \end{aligned}$$
denn $\sigma_k \circ \delta_{k-1}^i = \sigma_{k-1}$ für $k \geq 1$ und allen $0 \leq i \leq k$. Natürlich ist $\partial_0 = 0$, denn $S_{-1}(X) = (0)$. Damit folgt $S_k(X) \cong \mathbb{Z}$ für $k \geq 0$ und

- $Z_k(X) = (0)$ für k gerade, $k \geq 2$, also $H_k(X) = (0)$, für k gerade und $k \geq 2$.

- $Z_k(X) = S_k(X)$ und $B_k(X) = \mathrm{im}(\partial_{k+1}) = S_k(X)$ für $k \in \mathbb{N}$ ungerade. Also ist auch hier $H_k(X) = (0)$.
- $Z_0(X) = S_0(X) \cong \mathbb{Z}$ und $B_0(X) = \mathrm{im}(\partial_1) = (0)$, also $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ und wird erzeugt vom singulären Simplex $\sigma_0 \in \Sigma_0(\mathrm{pt})$.

□

Bemerkung 3.2.9 *Sei X ein topologischer Raum und $X = \dot\bigcup_{i\in I} X_i$ die Zerlegung in seine Wegkomponenten. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$:*

$$H_k(X) \cong \bigoplus_{i\in I} H_k(X_i).$$

Beweis. Das Bild eines singulären Simplexes $\sigma\colon \Delta_k \to X$ liegt stets in einer Wegkomponente (und auch sein Rand liegt dann in dieser), denn Δ_k ist wegzusammenhängend. Der von den Inklusionen $\iota_i\colon X_i \to X$ induzierte Homomorphismus

$$\Phi\colon \bigoplus_{i\in I} S_k(X_i) \to S_k(X)$$

($k \in \mathbb{N}_0$) ist daher eine Isomorphie zwischen den Kettenkomplexen $\bigoplus_{i\in I} S(X_i)$ und $S(X)$. Da der Homologiefunktor H_k mit Summen (beliebig vieler Summanden, siehe Aufgabe 3.4.2) vertauscht, erhält man einen (sogar kanonischen) Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} H_k(X_i) \xrightarrow{\cong} H_k(\bigoplus_{i\in I} S(X_i)) \xrightarrow{\cong} H_k(S(X)) = H_k(X).$$

□

Bemerkung 3.2.10 *Ist X wegzusammenhängend (und nicht-leer), so ist $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Beweis. Ein singulärer 0-Simplex $\sigma\colon \Delta_0 \to X$ wird mit seinem Bild $x = \sigma(e_0) \in X$ identifiziert. Eine 0-Kette $c \in \mathbb{S}_0(X)$ ist dann ein Element $c = \sum_{i=1}^r n_i x_i$ mit $r \in \mathbb{N}_0$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in X$ ($x_1, \ldots, x_r$ paarweise verschieden), $i = 1, \ldots, r$. Definiere nun (die *Augmentierung*, vgl. Aufgabe 3.4.8) $\varepsilon\colon S_0(X) \to \mathbb{Z}$ durch

$$\varepsilon(\sum_{i=1}^r n_i x_i) := \sum_{i=1}^r n_i.$$

Ist $\sigma\colon \Delta_1 \to X$ ein singulärer 1-Simplex, so ist σ ein Weg von $\sigma(e_0)$ nach $\sigma(e_1)$ und

$$\varepsilon \circ \partial(\sigma) = \varepsilon(\sigma(e_1) - \sigma(e_0)) = 1 - 1 = 0$$

und außerdem ist ε surjektiv (da $X \neq \emptyset$ ist). Damit existiert ein (eindeutig bestimmter) Homomorphismus $\hat{\varepsilon}\colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$ mit $\hat{\varepsilon} \circ \pi = \varepsilon$, wo $\pi\colon Z_0(X) \to H_0(X)$ die kanonische Projektion ist (vgl. Diagramm 3.14). Mit ε ist dann auch $\hat{\varepsilon}$ surjektiv.

Abbildung 3.14: die Augmentierung von X

Behauptung: $\hat{\varepsilon}$ ist auch injektiv.

Sei dazu $x_0 \in X$ fest. Jeder singuläre 0-Simplex $x \in X$ ist *homolog* zu $x_0 \in Z_0(X) = S_0(X)$, denn X ist wegzusammenhängend. Ist nämlich $\alpha\colon [0,1] \to X$ ein Weg von x_0 nach x, so gilt für $\sigma = \alpha\colon \Delta_1 \cong [0,1] \to X$: $\partial\sigma = x - x_0$. Deshalb gilt nun für ein $z \in Z_0(X)$ mit $\hat{\varepsilon}([z]) = 0$, also $z = \sum_i n_i x_i$ mit $\sum_i n_i = 0$:

$$[z] = \sum_i n_i[x_i] = \sum_i n_i[x_0] = \left(\sum_i n_i\right)[x_0] = 0.$$

$\square$

Kommentar 3.2.11 (a) $H_0(X)$ ist also nach 3.2.9 und 3.2.10 eine frei abelsche Gruppe und ihr *Rang* ist die Kardinalität der Wegkomponenten von X. (Sie leistet das Gleiche wie die Menge $\pi_0(X)$).

(b) Ein topologischer Raum X heißt *azyklisch*, wenn $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ und $H_k(X) = (0)$ für $k \geq 1$ ist. Er hat dann keine „wesentlichen Zykeln“.

Motivation 3.2.12 Seien $f, g\colon X \to Y$ homotop. Ist es dann richtig, dass für $f_*, g_*\colon H_k(X) \to H_k(Y)$ (wie im Falle der Funktoren π_k ($k \in \mathbb{N}_0$), siehe Aufgabe 2.4.27) gilt:

$$f_* = g_*?$$

Falls ja, so würde folgen: Sind X und Y homotopieäquivalent, $X \simeq Y$, so sind $H_k(X)$ und $H_k(Y)$ isomorph, $H_k(X) \cong H_k(Y)$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$. (Tatsächlich werden wir sogar zeigen, dass die zugehörigen singulären Kettenkomplexe $S(X)$ und $S(Y)$ (ketten-) homotopieäquivalent sind, $S(X) \simeq S(Y)$, (vgl. 3.1.21).) Insbesondere würde für zusammenziehbare Räume X (z.B. $X = \mathbb{R}^n$), $X \simeq \mathrm{pt}$, gelten: X ist azyklisch.

Lemma 3.2.13 *(Kegelkonstruktion). Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine sternförmige Teilmenge (d.h.: es existiert ein $p \in X$, so dass für alle $x \in X$ die Verbindungsstrecke $\overline{px}$ auch in X liegt). Dann ist X azyklisch.*

Beweis. Sei $p \in X$ ein *Sternpunkt* von X (d.h.: $\overline{px} \subseteq X$, für alle $x \in X$). Wir definieren dann für jeden singulären k-Simplex $\sigma \in \Sigma_k(X)$, $k \in \mathbb{N}_0$, den *Kegel mit Spitze p über σ* wie folgt: Zunächst hat jedes $x \in \Delta_{k+1}$ eine eindeutige Darstellung (vgl. Abbildung 3.15)

$$x = (1-t)e_0 + t\delta_k^0(y)$$

mit $0 \leq t \leq 1$ und $y \in \Delta_k$.

Abbildung 3.15: der Kegel über σ

Nun setzen wir $C_p\sigma\colon \Delta_{k+1} \to X$,

$$\begin{aligned} C_p\sigma(x) &= C_p\sigma((1-t)e_0 + t\delta_k^0(y)) \\ &:= (1-t)p + t\sigma(y) \end{aligned}$$

und setzen dann C_p zu einem Homomorphismus $C_p\colon S_k(X) \to S_{k+1}(X)$ (eindeutig) fort.

Behauptung: Für $k \geq 1$ und alle $c \in S_k(X)$ gilt:

$$(*) \quad \partial_{k+1} \circ C_p(c) = c - C_p \circ \partial_k(c)$$

(vgl. Abbildung 3.16).

Abbildung 3.16: der Rand des Kegels über σ

Es reicht die Behauptung zunächst für einen singulären k-Simplex $c = \sigma \in \Sigma_k(X)$ $(k \geq 1)$ zu zeigen (denn C_p ist Homomorphismus). Sei dazu $y \in \Delta_k$ beliebig. Dann gibt es also (eindeutig bestimmte) $s \in [0,1]$ und $z \in \Delta_{k-1}$, so dass

$$y = (1-s)e_0 + s\delta^0_{k-1}(z)$$

ist. Es ist dann zunächst nach Definition von C_p

$$C_p\sigma(\delta^0_k(y)) = \sigma(y)$$

und für $i = 1, \ldots, k+1$:

$$\begin{aligned} C_p\sigma(\delta^i_k(y)) &= C_p\sigma(\delta^i_k((1-s)e_0 + s\delta^0_{k-1}(z))) \\ &= C_p\sigma((1-s)e_0 + s\delta^i_k \circ \delta^0_{k-1}(z)) \end{aligned}$$

und damit nach 3.2.3

$$\begin{aligned} C_p\sigma(\delta^i_k(y)) &= C_p\sigma((1-s)e_0 + s\delta^0_k(\delta^{i-1}_{k-1}(z))) \\ &= (1-s)p + s\sigma \circ \delta^{i-1}_{k-1}(z) \\ &= C_p(\sigma \circ \delta^{i-1}_{k-1})((1-s)e_0 + s\delta^0_{k-1}(z)) \\ &= C_p(\sigma \circ \delta^{i-1}_{k-1})(y). \end{aligned}$$

Daraus sieht man nun

$$\begin{aligned} \partial_{k+1} \circ C_p(\sigma) &= \sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i C_p\sigma \circ \delta^i_k = C_p \circ \delta^0_k + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i C_p\sigma \circ \delta^i_k \\ &= \sigma + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i C_p(\sigma \circ \delta^{i-1}_{k-1}) \overset{i \mapsto i+1}{=} \sigma + \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+1} C_p(\sigma \circ \delta^i_{k-1}) \\ &= \sigma - C_p(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \sigma \circ \delta^i_{k-1}) = \sigma - C_p \circ \partial_k(\sigma). \end{aligned}$$

Abbildung 3.17: der Kegel über einem Zyklus

Insbesondere ist nun jeder Zyklus $z \in Z_k(X)$ $(k \geq 1)$ Rand des Kegels über ihm (siehe Abbildung 3.17):

$$z = \partial(C_p z) + C_p(\partial z) = \partial(C_p z) \in B_k(X).$$

Also ist

$$H_k(X) = (0), \ \forall k \geq 1$$

und $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ sowieso, da X wegzusammenhängend ist. □

Kommentar 3.2.14 Bezeichne $\varepsilon\colon S(X) \to \underline{\mathbb{Z}}$ die übliche Augmentierung des singulären Kettenkomplexes eines topologischen Raumes X, $\varepsilon(x) = 1$ für $x \in X$ und $\tau\colon \underline{\mathbb{Z}} \to S(X)$, $\tau(1) = p$ ($\underline{\mathbb{Z}}_k = (0)$ für $k \geq 1$, $\underline{\mathbb{Z}}_0 = \mathbb{Z}$, vgl. die Aufgaben 3.4.9 und 3.4.11 sowie Bemerkung 3.2.10). Dann ist für die Kegelkonstruktion auf Nullsimplexen $x \in X$

$$\partial_1 \circ C_p(x) + C_p \circ \partial_0(x) = \partial_1 \circ C_p(x) = x - p = (\mathrm{id} - \tau \circ \varepsilon)(x)$$

und deshalb mit $(*)$ aus dem Beweis von 3.2.13:

$$\partial_{k+1} \circ C_p + C_p \circ \partial_k = \mathrm{id}_k - (\tau \circ \varepsilon)_k,$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und damit $\tau \circ \varepsilon \simeq \mathrm{id}_C$ und $\varepsilon \circ \tau = \mathrm{id}_{\underline{\mathbb{Z}}}$ sowieso. Es ist also $S(X) \simeq \underline{\mathbb{Z}}$ und damit

$$H_k(X) \cong H_k(\underline{\mathbb{Z}}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \\ (0) & \text{sonst} \end{cases} .$$

Satz 3.2.15 *(Homotopiesatz). Sind $f, g: X \to Y$ homotope Abbildungen zwischen topologischen Räumen X und Y und $k \in \mathbb{N}_0$, so sind die induzierten Homomorphismen $f_*, g_*: H_k(X) \to H_k(Y)$ gleich,*

$$f_* = g_*.$$

Kommentar 3.2.16 (a) Der gleich folgende Beweis wird zeigen, dass die induzierten Kettenabbildungen $Sf, Sg: S(X) \to S(Y)$ zweier homotoper Abbildungen $f, g: X \to Y$ kettenhomotop sind. (Deshalb vielleicht der Name.) Mit 3.1.20 folgt dann die Behauptung. Das zunächst folgende Lemma ist von dieser Situation offenbar ein Spezialfall (der aber offensichtlich schon die volle technische Schwierigkeit enthält).

(b) Ist insbesondere $f: X \to Y$ eine Homotopie-Äquivalenz, und $g: Y \to X$ ein Homotopie-Inverses zu f, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, so ist also $Sf: S(X) \to S(Y)$ eine (Ketten-) Homotopie-Äquivalenz, denn

$$Sg \circ Sf = S(g \circ f) \simeq S(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{S(X)}$$

und genau so

$$Sf \circ Sg \simeq \mathrm{id}_{S(Y)}.$$

Damit ist dann $f_* = H_k \circ S(f): H_k(X) \to H_k(Y)$ ein Isomorphismus, denn

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_k(X)}$$

und genau so $f_* g_* = \mathrm{id}_{H_k(Y)}$.

Lemma 3.2.17 *Sei X ein topologischer Raum und $\varphi, \psi: X \to X \times I$ gegeben durch*

$$\varphi(x) = (x, 0), \quad \psi(x) = (x, 1).$$

Dann sind $S\varphi, S\psi: S(X) \to S(X \times I)$ kettenhomotop.

Beweis von 3.2.15. Seien also f und g homotop vermöge einer Homotopie $H: X \times I \to Y$. Seien weiter φ, ψ wie im Lemma und D eine Kettenhomotopie zwischen $S\varphi$ und $S\psi$. Dann ist zunächst $f = H \circ \varphi$, $g = H \circ \psi$ und $SH \circ D$ ist eine Kettenhomotopie zwischen $SH \circ S\varphi$ und $SH \circ S\psi$, $SH \circ S\varphi \simeq SH \circ S\psi$. Damit ergibt sich dann wie folgt tatsächlich, dass auch Sf und Sg kettenhomotop sind und damit $f_* = g_*$:

$$Sf = S(H \circ \varphi) = SH \circ S\varphi \simeq SH \circ S\psi = S(H \circ \psi) = Sg.$$

□

Beweis von 3.2.17. Wir beweisen etwas mehr, nämlich: Es gibt für jeden topologischen Raum eine Kettenhomotopie $D^X = (D^X_k)\colon S(X) \to S(X \times I)$ zwischen $S\varphi$ und $S\psi$, also

$$(*) \quad \partial D^X_k + D^X_{k-1}\partial = S_k\psi - S_k\varphi, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

so dass für alle (topologischen Räume Y und) stetigen Abbildungen $f\colon X \to Y$ gilt:

$$(**) \quad D^Y_k \circ S_k f = S_{k+1}(f \times \mathrm{id}) D^X_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

als Homomorphismen von $S_k(X)$ nach $S_{k+1}(Y \times I)$.

(Im Sinne von Aufgabe 3.4.5 bedeutet das gerade, dass $X \mapsto D^X_k$ (für jedes $k \in \mathbb{N}_0$) eine natürlichen Transformation zwischen den Funktoren

$$F := S_k\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{KK},\ X \mapsto S_k(X),\ f \mapsto S_k f$$

und

$$G\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{KK},\ X \mapsto S_{k+1}(X \times I),\ f \mapsto S_{k+1}(f \times \mathrm{id})$$

ist.)

Der Beweis wird nun durch Induktion über k (simultan für alle X, Y und $f \in \mathcal{C}(X, Y)$) geführt:

$k = 0$ (Induktionsanfang): Hier setzen wir $D^X_0\colon S_0(X) \to S_1(X \times I)$ (vgl. auch Abbildung 3.18),

$$D^X_0(x)(t) := (x, t),$$

wobei wir hier einige natürliche Identifikationen vorgenommen haben. Zunächst identifizieren wir nämlich wieder wie in 3.2.10 $\Sigma_0(X)$ mit X (via $\sigma \mapsto \sigma(e_0)$). Es ist dann $S_0 f(x) = f(x)$, denn $S_0 f(\sigma) = f \circ \sigma$. Des Weiteren haben wir auch I mit Δ_1 (wie auch in 3.2.10) via $t \mapsto (1-t)e_0 + te_1$ identifiziert.

Abbildung 3.18: die Kettenhomotopie auf 0-Simplexen

Es ist dann zunächst (für jedes X):

$$\begin{aligned} \partial D_0(x) + D_{-1}\partial x &= \partial D_0(x) = (x,1) - (x,0) = \psi(x) - \varphi(x) \\ &= S_0\psi(x) - S_0\varphi(x), \end{aligned}$$

für alle $x \in X$ und damit $(*)$ für $k = 0$. Weiter ist für alle X, Y und $f \in \mathcal{C}(X,Y)$

$$\begin{aligned} D_0^Y S_0 f(x)(t) &= D_0^Y(f(x))(t) = (f(x),t) = (f \times \mathrm{id})(x,t) \\ &= (f \times \mathrm{id})(D_0^X(x)(t)) = S_1(f \times \mathrm{id})D_0^X(x)(t), \end{aligned}$$

für alle $x \in X$ und $t \in I$ und damit $(**)$ für $k = 0$.

$k-1 \mapsto k$ (Induktionsschritt): (Wir nehmen die Aussagen $(*)$ und $(**)$ für $k-1$ an, und zwar für alle X, Y und $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.) Zunächst betrachten wir nun die Identität $\mathrm{id}_k\colon \Delta_k \to \Delta_k$ als ein Element in $\Sigma_k(\Delta_k) \subseteq S_k(\Delta_k)$. Es ist dann für jedes $\sigma \in \Sigma_k(X)$

$$\sigma = \sigma \circ \mathrm{id}_k = S\sigma(\mathrm{id}_k).$$

Außerdem betrachten wir unsere Abbildungen $\varphi = \varphi^X, \psi = \psi^X\colon S(X) \to S(X \times I)$ speziell für $X = \Delta_k$ und notieren diese dann mit $i := \varphi^{\Delta_k}$ und $j := \psi^{\Delta_k}$. Für jedes $\sigma \in \Sigma_k(X)$ (und jedem X) folgt zunächst die Kommutativität des Diagramms 3.19:

$$\varphi \circ \sigma(\lambda) = (\sigma(\lambda), 0) = (\sigma \times \mathrm{id})(\lambda, 0) = (\sigma \times \mathrm{id}) \circ i(\lambda),$$

für alle $\lambda \in \Delta_k$.

Abbildung 3.19: die Rückführung auf i

Aber damit gilt dann auch

$$\begin{aligned} S\varphi(\sigma) &= S\varphi S\sigma(\mathrm{id}_k) = S(\varphi \circ \sigma)(\mathrm{id}_k) = S((\sigma \times \mathrm{id}) \circ i)(\mathrm{id}_k) \\ &= S(\sigma \times \mathrm{id})Si(\mathrm{id}_k) \end{aligned}$$

Abbildung 3.20: der Zyklus z_k in $\Delta_k \times I$

und ähnlich für ψ und j. Nun betrachten wir das Element

$$z_k := S_k j(\mathrm{id}_k) - S_k i(\mathrm{id}_k) - D_{k-1}^{\Delta_k}(\partial \mathrm{id}_k)$$

in $S_k(\Delta \times I)$, welches nach Induktionsvoraussetzung definiert ist (vgl Abbildung 3.20).

Es ist dann z_k ein Zyklus, denn

$$\begin{aligned} \partial z_k &= S_{k-1} j(\partial \mathrm{id}_k) - S_{k-1} i(\partial \mathrm{id}_k) - (D_{k-2}^{\Delta_k} \partial + S_{k-1} j - S_{k-1} i)(\partial \mathrm{id}_k) \\ &= 0, \end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung (für $X = \Delta_k$). Weil nun $\Delta_k \times I \subseteq \mathbb{R}^{k+2}$ sternförmig und damit nach Lemma 3.2.13 azyklisch ist (wir sind im Fall $k \geq 1$), existiert eine Kette $c_{k+1} \in S_{k+1}(\Delta_k \times I)$ mit $\partial c_{k+1} = z_k$. (Diese Kette sei nun fest gewählt. Sie wird im Folgenden für jedes X verwendet. Die folgende Definition stimmt im Übrigen mit der im Fall $k = 0$ überein, wenn man für c_1 die Identifizierung von Δ_1 mit I aus dem Induktionsanfang nimmt.) Man definiert nun $D_k^X \colon S_k(X) \to S_{k+1}(X \times I)$ (für jeden topologischen Raum X) so: Ist $\sigma \in \Sigma_k(X)$, so sei (vgl. Abbildung 3.21)

$$D_k^X(\sigma) := S_{k+1}(\sigma \times \mathrm{id})(c_{k+1}).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial D_k^X(\sigma) &= \partial S_{k+1}(\sigma \times \mathrm{id})(c_{k+1}) = S_k(\sigma \times \mathrm{id})(\partial c_{k+1}) \\ &= S_k(\sigma \times \mathrm{id})(S_k j(\mathrm{id}_k) - S_k i(\mathrm{id}_k) - D_{k-1}^{\Delta_k}(\partial \mathrm{id}_k)) \\ &= S_k \psi(\sigma) - S_k \varphi(\sigma) - S_k(\sigma \times \mathrm{id}) D_{k-1}^{\Delta_k}(\partial \mathrm{id}_k). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ((∗∗) angewendet auf $\tilde{X} = \Delta$, $\tilde{Y} = X$ und $f = \sigma$) gilt:

$$S_k(\sigma \times \mathrm{id}) D_{k-1}^{\Delta_k}(\partial \mathrm{id}_k) = D_{k-1}^X S_{k-1} \sigma(\partial \mathrm{id}_k).$$

Abbildung 3.21: die Kettenhomotopie auf einem k-Simplex

Also ist

$$\partial D_k^X(\sigma) = S_k\psi(\sigma) - S_k\varphi(\sigma) - D_{k-1}^X\partial(S_k\sigma(\mathrm{id}_k)),$$

also wegen $S_k\sigma(\mathrm{id}_k) = \sigma$

$$\partial D_k^X + D_{k-1}^X\partial = S_k\psi - S_k\varphi$$

auf ganz $S_k(X)$. Das zeigt $(*)$ für k. Für $(**)$ sei schließlich X und Y beliebig und $f\colon X \to Y$ stetig. Dann ist

$$\begin{aligned} S_{k+1}(f \times \mathrm{id})D_k^X(\sigma) &= S_{k+1}(f \times \mathrm{id})S_{k+1}(\sigma \times \mathrm{id})(c_{k+1}) \\ &= S_{k+1}((f \times \mathrm{id})(\sigma \times \mathrm{id}))(c_{k+1}) \\ &= S_{k+1}((f \circ \sigma) \times \mathrm{id})(c_{k+1}) \\ &= S_{k+1}(S_kf(\sigma) \times \mathrm{id})(c_{k+1}) \overset{\text{Def.}}{=} D_k^Y(S_kf(\sigma)) \\ &= (D_k^Y \circ S_kf)(\sigma), \end{aligned}$$

für alle $\sigma \in \Sigma_k(X)$, also auch $(**)$ für k. □

Kommentar 3.2.18 (a) Erst jetzt wird die Bedeutung einer Kettenhomotopie D zwischen zwei Kettenabbildungen $Sf, Sg\colon S(X) \to S(Y)$ klar: Ist σ ein k-Simplex in X, so ist $D_k\sigma$ eine $(k+1)$-Kette in Y mit Rand

$$\partial(D_k\sigma) = Sg(\sigma) - Sf(\sigma) - D_{k-1}(\partial\sigma)$$

(vgl. Abbildung 3.22).

(b) Nennt man zwei Zykel $z, z' \in Z_k(Y)$ *homotop*, wenn es einen Raum X gibt, zwei zueinander homotope Abbildunegn $f, g\colon X \to Y$ und einen Zyklus $\tilde{z} \in Z_k(X)$, so dass $z = Sf(\tilde{z})$ und $z' = Sg(\tilde{z})$ ist, so besagt 3.2.15 (vgl. auch Abbildung 3.23):

Abbildung 3.22: Homotopie und Kettenhomotopie

Abbildung 3.23: homologe, aber nicht homotope Zykel in $\mathbb{F}_2$

„Homotope Zykel sind homolog!“

Definition 3.2.19 Für den Standard-Simplex Δ_k der Dimension $k \in \mathbb{N}_0$ nennt man

$$p_k := \frac{1}{k+1}(e_0 + \ldots + e_k) \in \Delta_k$$

den *Schwerpunkt* von Δ_k und setzt rekursiv die *Unterteilungskette* $u_k \in S_k(\Delta_k)$ so fest:

$$\begin{aligned} u_0 &:= \mathrm{id}_{\Delta_0} \in S_0(\Delta_0) \\ u_k &:= \sum_{i=0}^{k} C_{p_k}(S\delta^i_{k-1}(u_{k-1})) \in S_k(\Delta_k) \end{aligned}$$

(vgl. Abbildung 3.24).

Abbildung 3.24: die Unterteilungsketten der Dimension $k = 0, 1, 2$

Definition 3.2.20 Sei X ein topologischer Raum und $S(X)$ sein singulärer Kettenkomplex. Man definiert dann $B^X = (B^X_k)_{k\in\mathbb{Z}}: S(X) \to S(X)$ durch $B_k := 0$ für $k < 0$ und

$$B_k(\sigma) := S_k\sigma(u_k)$$

für $\sigma \in \Sigma_k(X)$ und setzt dann B_k zu einem Homomorphismus auf $S_k(X)$ fort. Es heißt B^X die *baryzentrische Unterteilung* auf X (vgl. Abbildung 3.25).

Proposition 3.2.21 *Für jeden topologischen Raum X ist $B^X: S(X) \to S(X)$ eine Kettenabbildung und die Zuordnung $X \mapsto B^X$ ist eine natürliche Transformation des Funktors S:* **Top** $\to$ **KK** *auf sich selbst (vgl. Aufgabe 3.4.5), d.h.: Ist $f: X \to Y$ stetig (für topologische Räume X und Y), so kommutiert das Diagramm 3.26,*

$$B^Y \circ Sf = Sf \circ B^X.$$

Abbildung 3.25: die baryzentrische Unterteilung auf X

Abbildung 3.26: $X \mapsto B^X$ ist natürliche Transformation

Beweis. Das Diagramm 3.26 kommutiert, denn für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned} S_k f(B_k^X \sigma) &= S_k f S_k \sigma(u_k) = S_k(f\sigma)(u_k) = B_k^Y(f\sigma) \\ &= B_k^Y(S_k f(\sigma)), \end{aligned}$$

für alle $\sigma \in \Sigma_k(X)$, also auch $S_k f B_k^X = B_k^Y S_k f$.

Das benutzen wir jetzt, um zu zeigen, dass für jedes X die baryzentrische Unterteilung eine Kettenabbildung ist mit Induktion über k.

Es ist zunächst

$$B_0(\sigma) = S_0\sigma(u_0) = \sigma \circ u_0 = \sigma,$$

denn $u_0 = \mathrm{id}_{\Delta_0}$, also $B_0 = \mathrm{id}$. Damit folgt für $k = 0$:

$$B_{-1}(\partial\sigma) = 0 = \partial B_0(\sigma)$$

für $\sigma \in \Sigma_0(X) = X$ und für $k = 1$:

$$\begin{aligned} \partial B_1(\sigma) &= \partial(S_1\sigma(u_1)) = S_0\sigma(\partial u_1) = S_0\sigma((e_1 - p_1) - (e_0 - p_1)) \\ &= S_0\sigma(e_1 - e_0) = \sigma(e_1) - \sigma(e_0) = \partial\sigma = B_0(\partial\sigma) \end{aligned}$$

für $\sigma \in \Sigma_1(X)$.

Nun sei $k \geq 2$ und $B_{k-2}^X \partial = \partial B_{k-1}^X$ (für alle X, insbesondere für $X = \Delta_k$) schon richtig. Wir schreiben zunächst

$$\begin{aligned} u_k &= C_{p_k}(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i S\delta_{k-1}^i(u_{k-1})) = C_{p_k}(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i B_{k-1}^{\Delta_k}(\delta_{k-1}^i)) \\ &= C_{p_k} B_{k-1}^{\Delta_k}(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(\mathrm{id}_k \circ \delta_{k-1}^i) = C_{p_k} B_{k-1}^{\Delta_k}(\partial \mathrm{id}_k), \end{aligned}$$

und damit

$$\partial u_k = \partial C_{p_k} B_{k-1}^{\Delta_k}(\partial \mathrm{id}_k).$$

Nun ist für alle $\sigma \in \Sigma_k(X)$:

$$\begin{aligned} \partial B_k^X(\sigma) &= \partial S\sigma(u_k) = S\sigma(\partial u_k) \\ &= S\sigma(\partial C_{p_k} B_{k-1}^{\Delta_k}(\partial \mathrm{id}_k)). \end{aligned}$$

Wegen 3.2.14 ist aber

$$\partial_k C_{p_k} + C_{p_k}\partial_{k-1} = \mathrm{id}$$

für $k \geq 2$ (Kegelkonstruktion) und deshalb

$$\begin{aligned}\partial C_{p_k}(B^{\Delta_k}_{k-1}(\partial \mathrm{id}_k)) &= B^{\Delta_k}_{k-1}(\partial \mathrm{id}_k) - C_{p_k}(\partial_{k-1} B^{\Delta_k}_{k-1}(\partial \mathrm{id}_k)) \\ &= B^{\Delta_k}_{k-1}(\partial \mathrm{id}_k) - C_{p_k}(B^{\Delta_k}_{k-2}(\partial^2 \mathrm{id}_k)) = B^{\Delta_k}_{k-1}(\partial \mathrm{id}_k)\end{aligned}$$

wegen der Induktionsannahme (für $k-1$ bei $X = \Delta_k$). Damit ist dann schließlich wegen der Kommutativität von Diagramm 3.26 für jedes X und allen $\sigma \in S_k(X)$:

$$\begin{aligned}\partial B^X_k(\sigma) &= S\sigma(B^{\Delta_k}_{k-1}(\partial \mathrm{id}_k)) = B^X_{k-1}(S\sigma(\partial \mathrm{id}_k)) \\ &= B^X_{k-1}(\partial S\sigma(\mathrm{id}_k)) = B^X_{k-1}(\partial(\mathrm{id}_k \circ \sigma)) = B^X_{k-1}\partial(\sigma),\end{aligned}$$

also

$$\partial B^X_k = B^X_{k-1}\partial.$$

□

Satz 3.2.22 *Für jeden topologischen Raum X ist $B^X\colon S(X) \to S(X)$ kettenhomotop zur Identität,*

$$B^X \simeq \mathrm{id}.$$

Kommentar 3.2.23 Nach 3.1.20 induzieren dann B und id die gleichen Homomorphismen auf der Homologie, also gilt für alle $z \in Z_k(X)$:

$$[Bz] = [z].$$

Beweis von 3.2.22. Schritt 1: Ähnlich wie in 3.2.21 wird die Behauptung zunächst für $X = \Delta_k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) bewiesen. Sei also $k \in \mathbb{N}_0$ und $\Delta = \Delta_k$ das k-dimensionale Standard-Simplex. Setze nun rekursiv $D^\Delta = D = (D_l)\colon S(\Delta) \to S(\Delta)$ fest durch ($D_l = 0$ für $l < 0$)

$$\begin{aligned}D_0 &:= 0 \\ D_l\sigma &:= C_p(B_l\sigma - \sigma - D_{l-1}(\partial\sigma)),\end{aligned}$$

wo $p = p_k \in \Delta_k = \Delta$ der Schwerpunkt von Δ sei (vgl. Abbildung 3.27).

Es gilt dann für alle $l \in \mathbb{N}_0$:

$$\partial D_l + D_{l-1}\partial = B_l - \mathrm{id}.$$

$l = 0$:

$$\partial D_0 + D_{-1}\partial = 0 = B_0 - \mathrm{id}.$$

$l-1 \to l$: Sei $\sigma \in \Sigma_l(\Delta)$. Dann ist

$$\partial D_l\sigma = \partial C_p(B_l\sigma - \sigma - D_{l-1}(\partial\sigma))$$

Abbildung 3.27: die Kettenhomotopie für Δ

und wegen

$$\partial(C_p)_l + (C_p)_l\partial = \mathrm{id}_l$$

für $l \geq 1$ nach 3.2.14 gilt:

$$\partial D_l\sigma = -C_p(\partial B_l\sigma - \partial\sigma - \partial D_{l-1}\partial\sigma) + (B_l\sigma - \sigma - D_{l-1}\partial\sigma).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist nun

$$\begin{aligned} \partial D_{l-1}(\partial\sigma) &= -D_{l-2}\partial(\partial\sigma) + B_{l-1}(\partial\sigma) - \partial\sigma \\ &= B_{l-1}(\partial\sigma) - \partial\sigma = \partial B_l\sigma - \partial\sigma, \end{aligned}$$

denn B ist eine Kettenabbildung nach 3.2.21. Also ist tatsächlich

$$(\partial D_l + D_{l-1}\partial)(\sigma) = B_l\sigma - \sigma,$$

für alle $\sigma \in \Sigma_l(\Delta)$.

Schritt 2: Sei nun X ein beliebiger topologischer Raum und $\sigma \in \Sigma_k(X)$, also $\sigma\colon \Delta_k \to X$ stetig ($k \in \mathbb{N}_0$). Wir setzen dann

$$D_k^X\sigma := S\sigma(D^{\Delta_k}(\mathrm{id}_k)).$$

Behauptung:

(i) D^X ist eine natürliche Transformation von S auf sich selbst, d.h.: Ist $f\colon X \to Y$ stetig, so ist $D^Y Sf = Sf D^X$.

(ii) D^X ist eine Kettenhomotopie zwischen B^X und $\mathrm{id}_{S(X)}$.

Zu (i): Für alle $\sigma \in \Sigma_k(X)$ gilt:

$$\begin{aligned} SfD^X\sigma &= SfS\sigma(D^\Delta(\mathrm{id})) = S(f\sigma)D^\Delta(\mathrm{id}) = D^Y(f\sigma) \\ &= D^Y(Sf(\sigma)). \end{aligned}$$

Zu (ii):

$$\begin{aligned} (\partial D^X + D^X\partial)(\sigma) &= \partial S\sigma D^\Delta(\mathrm{id}) + D^X\partial S\sigma(\mathrm{id}) \\ &= S\sigma(\partial D^\Delta(\mathrm{id})) + D^X S\sigma(\partial\mathrm{id}) \\ &= S\sigma(\partial D^\Delta(\mathrm{id})) + S\sigma D^\Delta(\partial\mathrm{id}) \quad \text{(nach (i))} \\ &= S\sigma(\partial D^\Delta + D^\Delta\partial)(\mathrm{id}) \\ &= S\sigma(B^\Delta - \mathrm{id})(\mathrm{id}) \quad \text{(nach Schritt 1)} \\ &= S\sigma(u_k - \mathrm{id}), \end{aligned}$$

denn

$$B^\Delta(\mathrm{id}) = S\mathrm{id}(u_k) = u_k.$$

Insgesamt ist also

$$(\partial D^X + D^X\partial)(\sigma) = S\sigma(u_k - \mathrm{id}) = B\sigma - \sigma,$$

für alle $\sigma \in \Sigma_k(X)$. □

Erinnerung 3.2.24 Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert man den *Durchmesser* von X als

$$\mathrm{diam}(X) := \sup\{|y - x| : \ x, y \in X\}$$

(vgl. Aufgabe 2.4.31).

Notation 3.2.25 Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $v_0, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ (*affin unabhängig*). Wir notieren das von $v_0, \ldots, v_k$ *aufgespannte Simplex* im $\mathbb{R}^n$ mit

$$[v_0, \ldots, v_k] := \{\sum_{j=0}^k t_j v_j : \ 0 \leq t_j \leq 1, \ \sum_{j=0}^k t_j = 1\}.$$

Bemerkung 3.2.26 *Es gilt:*

$$\mathrm{diam}[v_0, \ldots, v_k] = \max_{i,j} |v_j - v_i|.$$

Beweis. Weil $[v_0, \dots, v_k] \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, nimmt die stetige Funktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |y - x|$, ihr Supremum an. Seien also $x_0, y_0 \in X$ mit

$$\operatorname{diam}(X) = |y_0 - x_0|.$$

Seien weiter $a, b \in X$ nun beliebig. Dann nimmt die Funktion $y \mapsto |y - x_0|$ auf

$$(a, b) := \{(1-t)a + tb : \ 0 < t < 1\} \subseteq X$$

ihr Supremum nicht an. Also ist $y_0 \notin (a, b)$, für alle $a, b \in X$. Daraus folgt $y_0 \in \{v_0, \dots, v_k\}$ und ähnlich sieht man, dass auch $x_0 \in \{v_0, \dots, v_k\}$ ist. □

Vorbereitung 3.2.27 Sei nun $X = [v_0, \dots, v_k] \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Simplex und $\sigma\colon \Delta_k \to X$ die Einschränkung der linearen Abbildung $\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^n$, die $\sigma(e_j) = v_j$ $(j = 0, \dots, k)$ erfüllt. Seien weiter $\sigma_i\colon \Delta_k \to X$ die Kettenglieder der baryzentrischen Unterteilung $B\sigma$ von σ $(i = 1, \dots, t)$,

$$B\sigma = \sum_{i=1}^{t} m_i \sigma_i \quad (m_i \in \mathbb{Z}).$$

Lemma 3.2.28 *Für alle $i = 1, \dots, t$ ist dann $Y_i := \sigma_i(\Delta_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ wiederum ein Simplex in $\mathbb{R}^n$ und hat Durchmesser*

$$\operatorname{diam}(Y_i) \leq \frac{k}{k+1} \operatorname{diam}(X).$$

Beweis. Weil σ Einschränkung einer linearen Abbildung ist, ist $Y := Y_i$ $(i \in \{1, \dots, t\})$ wiederum ein Simplex. Seine Ecken $w_0, \dots, w_k$ bestehen aus Schwerpunkten von Teilsimplexen, die ineinander geschachtelt sind. (w_0 ist Ecke von X und w_k ist der Schwerpunkt von X.) Nach geeigneter Umnummerierung von $v_0, \dots, v_k$ gibt es nach 3.2.26 deshalb $0 \leq r < s \leq k$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(Y) &= \Big|\frac{1}{s+1}\sum_{j=0}^{s} v_j - \frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r} v_j\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r} v_j - \frac{1}{s+1}\sum_{j=0}^{r} v_j - \frac{1}{s+1}\sum_{j=r+1}^{s} v_j\Big| \\
&= \Big|\frac{(s+1)-(r+1)}{(r+1)(s+1)}\sum_{j=0}^{r} v_j - \frac{1}{s+1}\sum_{j=r+1}^{s} v_j\Big| \\
&= \frac{s-r}{s+1}\Big|\frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r} v_j - \frac{1}{s-r}\sum_{j=r+1}^{s} v_j\Big| \\
&\leq \frac{s-r}{s+1}\operatorname{diam}(X),
\end{aligned}$$

weil die beiden Terme innerhalb des Absolutbetrages in X sind. Wegen $r \geq 0$ und $s \leq k$ folgt schließlich

$$\frac{s-r}{s+1} = \frac{(s+1)-(r+1)}{s+1} = 1 - \frac{r+1}{s+1} \leq 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

□

Lemma 3.2.29 *(Kleine Ketten). Sei X ein topologischer Raum, $U, V \subseteq X$ offen und $X = U \cup V$. Sei weiter $k \in \mathbb{N}_0$ und c eine k-Kette in X, $c \in S_k(X)$. Dann gibt es ein $r > 0$ und Ketten $x \in S_k(U)$, $y \in S_k(V)$, so dass gilt ($B^r := B \circ \ldots \circ B$, r-mal):*

$$B^r c = x + y$$

(vgl. Abbildung 3.28).

Abbildung 3.28: die Zerlegung eines Simplexes

Beweis. Sei o.E. $c = \sigma \in \Sigma_k(X)$ ein singuläres k-Simplex, $\sigma\colon \Delta_k \to X$. (Sonst mache man die Zerlegung für jedes Glied einer Kette und nehme dann das Maximum der dabei benötigten Potenzen von B.) Dann ist $(\sigma^{-1}(U), \sigma^{-1}(V))$ eine offene Überdeckung von $\Delta := \Delta_k$. Nach Aufgabe 2.4.31 gibt es daher ein(e) (Lebesguesche Zahl) $\lambda > 0$, so dass gilt: Ist $A \subseteq \Delta$ mit $\operatorname{diam}(A) < \lambda$, so ist $A \subseteq \sigma^{-1}(U)$ oder $A \subseteq \sigma^{-1}(V)$.

Setze nun $c_r := B^r(\mathrm{id}) \in S_k(\Delta)$, $r \in \mathbb{N}_0$, und nenne ihre Kettenglieder τ_i $(i = 1, \ldots, t)$:

$$B^r(\mathrm{id}) = \sum_{i=1}^{t} m_i \tau_i \quad (m_i \in \mathbb{Z}).$$

Es folgt nun für jedes $i = 1, \ldots, t$ aus Lemma 3.2.28:

$$\operatorname{diam}(\tau_i(\Delta)) \leq (\frac{k}{k+1})^r \operatorname{diam}(\Delta).$$

Wegen $(\frac{k}{k+1})^r \to 0$ für $r \to \infty$ können wir daher ein $r \in \mathbb{N}_0$ so groß wählen, dass $\operatorname{diam}(\tau_i(\Delta)) < \lambda$ ist, für alle $i = 1, \ldots, t$. Daher gilt für alle i:

$$\tau_i(\Delta) \subseteq \sigma^{-1}(U) \text{ oder } \tau_i(\Delta) \subseteq \sigma^{-1}(V).$$

Setze schließlich

$$I := \{i \in \{1, \ldots, t\} : \ \tau_i(\Delta) \subseteq \sigma^{-1}(U)\}.$$

Dann ist $\sigma \circ \tau_i \in S_k(U)$ für $i \in I$ und $\sigma \circ \tau_i \in S_k(V)$ für $i \notin I$. Mit

$$x := \sum_{i \in I} m_i(\sigma \circ \tau_i) \text{ und } y := \sum_{i \notin I} m_i(\sigma \circ \tau_i)$$

folgt dann

$$B^r\sigma = B^r(S\sigma(\mathrm{id})) = S\sigma(B^r(\mathrm{id})),$$

da $X \mapsto B^X$ eine natürliche Transformation ist (3.2.21) und daher

$$\begin{aligned} B^r\sigma &= S\sigma(\sum_{i=1}^{t} m_i\tau_i) = \sum_{i \in I} m_i S\sigma(\tau_i) + \sum_{i \notin I} m_i S\sigma(\tau_i) \\ &= \sum_{i \in I} m_i(\sigma \circ \tau_i) + \sum_{i \notin I} m_i(\sigma \circ \tau_i) = x + y. \end{aligned}$$

□

Satz 3.2.30 *(von Mayer-Vietoris). Sei X ein topologischer Raum, $U, V \subseteq X$ offen und $X = U \cup V$. Dann existiert eine lange exakte Homologiesequenz abelscher Gruppen (so genannte Mayer-Vietoris-Sequenz)* $(*)$

$$\ldots \xrightarrow{\nu} H_{k+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_k(U \cap V) \xrightarrow{\mu} H_k(U) \oplus H_k(V) \xrightarrow{\nu} H_k(X) \xrightarrow{\Delta} \ldots .$$

Zusatz 3.2.31 Bezeichnen $i' \colon U \to X$, $i'' \colon V \to X$ und $j' \colon U \cap V \to U$, $j'' \colon U \cap V \to V$ die Inklusionen, so sind μ, ν und Δ wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} &\mu_k \colon H_k(U \cap V) \to H_k(U) \oplus H_k(V), \ [z] \mapsto (j'_*[z], -j''_*[z]); \\ &\nu_k \colon H_k(U) \oplus H_k(V) \to H_k(X), \ ([z'], [z'']) \mapsto i'_*[z'] + i''_*[z'']; \\ &\Delta_k \colon H_k(X) \to H_{k-1}(U \cap V), \ [z] \mapsto [\partial x]_{U \cap V} = -[\partial y]_{U \cap V}, \end{aligned}$$

wobei $B^r z = x + y$ mit $x \in S_k(U)$, $y \in S_k(V)$ $(r \in \mathbb{N}_0)$ ist. Insbesondere ist Δ wohldefiniert, d.h.: sie hängt nicht von der Wahl von r und auch nicht der Zerlegung $x + y$ ab, vgl. Abbildung 3.29.

Abbildung 3.29: der verbindende Homomorphismus in der Mayer-Vietoris-Sequenz

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow S(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} S(U) \oplus S(V) \xrightarrow{\beta} Si'(SU) + Si''(SV) \longrightarrow 0$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha(c) &= (Sj'(c), -Sj''(c)), \\ \beta(c_1, c_2) &= Si'(c_1) + Si''(c_2). \end{aligned}$$

Die lange Homologiesequenz dazu ist dann

$$(**) \qquad \ldots \xrightarrow{\beta_*} H_{k+1}(C' + C'') \xrightarrow{\partial_*} H_k(U \cap V) \xrightarrow{\alpha_*} H_k(S(U) \oplus S(V)) \xrightarrow{\beta_*} H_k(C' + C'') \xrightarrow{\partial_*} \ldots,$$

wobei wir hier $C' := Si'(S(U))$ und $C'' = Si''(S(V))$ abgekürzt haben.

Wir zeigen nun, dass (C', C'') ein Ausschneidungspaar von $C = S(X)$ ist, d.h.: die Inklusion $i\colon C' + C'' \to C$ induziert einen Isomorphismus in der Homologie,

$$i_*\colon H_k(C' + C'') \xrightarrow{\cong} H_k(C).$$

(i) Surjektivität: Sei $z \in Z_k(X)$ beliebig und $r \in \mathbb{N}_0$ so groß, dass es $x \in S_k(U)$ und $y \in S_k(V)$ mit $B^r z = x + y$ gibt (vgl. 3.2.29). (Wir identifizieren hier $i'(x)$ mit x und $i''(y)$ mit y.). Es ist dann $x+y \in C'+C''$ auch ein Zyklus in $C' + C''$, denn B^r ist eine Kettenabbildung und daher ist

$$\partial(x + y) = \partial B^r(z) = B^r(\partial z) = 0$$

(in $S(U)+S(V)$). Für die Homologieklasse $[x+y]_{C'+C''}$ ist dann wegen 3.2.23

$$i_*([x+y]_{C'+C''}) = [x+y]_C = [B^r z]_C = [z]_C,$$

also i_* surjektiv.

(ii) Injektivität: Sei also $x+y \in Z_k(C'+C'')$ gegeben mit

$$0 = i_*([x+y]_{C'+C''}) = [x+y]_C.$$

Es gibt dann also ein $c \in C_{k+1} = S_{k+1}(X)$ mit $\partial c = x+y$. Nach Lemma 3.2.29 können wir nun ein $r \in \mathbb{N}_0$ so groß wählen, dass es $x' \in C'_{k+1}$ und $y' \in C''_{k+1}$ gibt mit $B^r c = x' + y'$. Es ist dann

$$\partial(x'+y') = \partial(B^r c) = B^r(\partial c) = B^r(x+y)$$

und damit

$$[x+y]_{C'+C''} = [B^r(x+y)]_{C'+C''} = [\partial(x'+y')]_{C'+C''} = 0.$$

Also ist i_* auch injektiv.

Ist nun can: $H_k(S(U) \oplus S(V)) \to H_K(U) \oplus H_k(V)$ der kanonische Isomorphismus (vgl. Aufgabe 3.4.2), so setzen wir

$$\begin{aligned}
\mu &:= \operatorname{can} \circ \alpha_*, \\
\nu &:= i_* \circ \beta_* \circ \operatorname{can}^{-1}, \\
\Delta &:= \partial_* \circ i_*^{-1},
\end{aligned}$$

und erhalten so eine lange Sequenz der gewünschten Art $(*)$, die isomorph zu $(**)$ vermöge des Morphismus' $(\ldots, \mathrm{id}, \operatorname{can}, i_*, \ldots)$ ist. Da $(**)$ exakt ist, ist es damit auch $(*)$. Der Zusatz ergibt sich für μ und ν unmittelbar aus der Definition und für Δ aus dem Beweis der Surjektivität von i_* und der Definition des verbindenden Homomorphismus' für $(**)$. $\square$

3.3 Anwendungen

Satz 3.3.1 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$H_k(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \text{ und } k = n \\ 0 & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\} \end{cases},$$

und für $n = 0$ gilt:

$$H_k(\mathbb{S}^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Für $n = 0$ folgt die Aussage unmittelbar aus 3.2.9 und 3.2.8, denn $\mathbb{S}^0 \cong \mathrm{pt} + \mathrm{pt}$.

Sei daher $n \in \mathbb{N}$, $N := (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ der *Nordpol* und $S := (0, \ldots, 0, -1)$ der *Südpol* von $\mathbb{S}^n$. Dann ist (U, V) ein Ausschneidungspaar für $\mathbb{S}^n$ (denn $U, V \subseteq \mathbb{S}^n$ sind offen und $U \cup V = \mathbb{S}^n$, vgl. 3.2.30). Da $U \cong \mathbb{R}^n \cong V$ (mittels stereographischer Projektion) und damit azyklisch ist, folgt für $k \geq 2$ aus der Mayer-Vietoris-Squenz für (U, V):

$$0 = H_k(U) \oplus H_k(V) \to H_k(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(U \cap V) \to H_{k-1}(U) \oplus H_{k-1}(V) = 0$$

ist exakt und damit $\Delta \colon H_k(\mathbb{S}^n) \to H_{k-1}(U \cap V)$ ein Isomorphismus. Für den *Äquator* $i \colon \mathbb{S}^{n-1} \to U \cap V$, $x \mapsto (x, 0)$, gilt aber, dass i ein Deformationsretrakt ist, also $\mathbb{S}^{n-1} \simeq U \cap V$. Damit ist i_* ein Isomorphismus (vgl. 3.2.16 und Aufgabe 3.4.14). Es folgt:

$$(*) \quad H_k(\mathbb{S}^n) \cong H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \quad \text{für alle } k \geq 2.$$

Ist nun $k > n$, so liefert n-maliges Anwenden bereits:

$$H_k(\mathbb{S}^n) \cong H_{k-n}(\mathbb{S}^0) = 0.$$

Für $k = 1$ findet man, dass

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \cong H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\mu} H_0(U) \oplus H_0(V)$$

exakt ist. Nimmt man die Beschreibung des Homomorphismus' μ aus dem Zusatz 3.2.31 hinzu, so folgt zunächst für $n \geq 2$, dass

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\Delta} H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\mu} H_0(U) \oplus H_0(V)$$

mit

$$\mu([x]) = ([x], -[x])$$

exakt ist, wobei $[x]$ jeweils eine Erzeuger von $\mathbb{Z} = H_0(\mathbb{S}^{n-1}) = H_0(U) = H_0(V)$ ist (für ein $x \in \mathbb{S}^{n-1}$). Es folgt, dass μ injektiv ist und damit wegen der Exaktheit bei $H_0(\mathbb{S}^{n-1})$: $\mathrm{im}(\Delta) = 0$. Da Δ auch injektiv ist (wegen der Exaktheit bei $H_1(\mathbb{S}^n)$), muss also auch

$$H_1(\mathbb{S}^n) = 0 \quad \text{für alle } n \geq 2$$

sein.

Sei nun $1 \leq k \leq n-1$ (für $n \geq 2$). Dann ergibt $(k-1)$-faches Anwenden von $(*)$

$$H_k(\mathbb{S}^n) \cong H_1(\mathbb{S}^{n-k+1}) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq n-1.$$

Es bleibt deshalb nur noch die Aussage für $H_n(\mathbb{S}^n)$ zu beweisen, denn $H^0(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, da $\mathbb{S}^n$ (für $n \geq 1$) wegzusammenhängend ist (vgl. 3.2.10).

Für $n = 1$ folgt aber nun, dass $H_0(\mathbb{S}^0)$ von $[1]$ und $[-1]$ erzeugt wird und

$$\mu([1]) = ([1], -[1]) \text{ und } \mu([-1]) = ([-1], -[-1])$$

ist. Vermöge der kanonischen Isomorphien $H_0(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ und $H_0(U) \oplus H_0(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist also μ gegeben durch

$$\mu(m, n) = (m + n, -m - n)$$

und damit

$$\mathrm{im}(\Delta) = \ker(\mu) = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} : \; m = -n\} \cong \mathbb{Z}.$$

Daraus folgt zunächst $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ und durch $n-1$-faches Anwenden von $(*)$ auch

$$H_n(\mathbb{S}^n) \cong H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

□

Kommentar 3.3.2 Insbesondere gilt also nun für $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^m \;\Leftrightarrow\; n = m,$$

denn ist o.E. $n \geq m$, so erhält man durch Anwenden des Funktors H_n aus $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^m$ unmittelbar $H_n(\mathbb{S}^n) \cong H_n(\mathbb{S}^m)$, woraus aus Satz 3.3.1 $n = m$ folgt. Ganz ähnlich geht man nun auch bei folgendem Satz vor:

Satz 3.3.3 *Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Es ist $\mathbb{R}^n$ nur dann homömorph zu $\mathbb{R}^m$, wenn $n = m$ ist.*

Beweis. Wir dürfen $n, m \geq 1$ annehmen, denn sonst ist die Aussage offensichtlich richtig und auch wieder, aus Symmetriegründen, $n \geq m$. Ist nun $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, so sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus. Dann ist (mit $p = f(0)$) auch $g := f|\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{p\}$ ein Homöomorphismus. Es ist aber $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ und $\mathbb{R}^m \setminus \{p\} \simeq \mathbb{S}^{m-1}$. Also ist

$$g_*\colon H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{p\}) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1})$$

ein Isomorphismus, womit aus Satz 3.3.1 unmittelbar $n = m$ folgt. □

Satz 3.3.4 *(Retraktionssatz). Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt keine Retraktion $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$.*

Beweis. Angenommen $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$ wäre doch ein Retrakt von $\mathbb{B}^n$. Dann gibt es also eine Retraktion $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, also $r \circ i = \mathrm{id}$. Anwenden eines beliebigen Funktors liefert dann

$$r_* \circ i_* = \mathrm{id}$$

und damit, dass i_* injektiv und r_* surjektiv ist. Es reicht also deshalb einen Funktor zu finden, der etwa auf $\mathbb{S}^{n-1}$ nicht-trivial ist, auf $\mathbb{B}^n$ aber wohl (siehe auch Aufgabe 3.4.14), und das haben wir mit dem Homologiefunktor H_{n-1}. Für $n = 1$ ist nämlich

$$H_0(\mathbb{B}^n) = \mathbb{Z} \quad \text{aber } H_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

und es gibt keinen surjektiven Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (siehe Aufgabe 3.4.16). Für $n \geq 2$ ist sogar $H_{n-1}(\mathbb{B}^n) = 0$ und $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{Z}$ und es gibt sicher keine Surjektion von der trivialen Gruppe (0) auf $\mathbb{Z}$. Also gibt es r_* und damit r nicht. □

Kommentar 3.3.5 Deshalb gilt nun auch der Fixpunktsatz von Brouwer in allen Dimensionen (vgl. Satz 3.3.6), denn der Beweis von 3.3.6 überträgt sich vom Retraktionssatz auf beliebige Dimensionen. Zur Erinnerung: Ist $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ doch stetig und ohne Fixpunkte, so bildet man für jedes $x \in \mathbb{B}^n$ den Strahl $L_x \subseteq \mathbb{R}^n$, der in $f(x)$ startet und in Richtung $v := x - f(x)$ läuft. Dann schneidet L_x die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ in genau einem Punkt $r(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\{r(x)\} = L_x \cap \mathbb{S}^{n-1}.$$

Es ist $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ stetig (vgl. Aufgabe 2.4.7). Nach Konstruktion ist auch klar, dass $r(x) = x$ ist, wenn $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist. Damit wäre $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ eine Retraktion, von der wir aber nach Satz 3.3.4 wissen, dass es sie nicht gibt und damit gibt es auch ein solches fixpunktfreies $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ nicht.

Satz 3.3.6 *(Fixpunktsatz von Brouwer). Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ eine stetige Abbildung. Dann hat f einen Fixpunkt.*

Erinnerung 3.3.7 Jeder Homomorphismus $T\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist von der Form

$$T(m) = dm,$$

für ein (eindeutig bestimmtes) $d \in \mathbb{Z}$. (Setze nämlich $d = T(1)$.) Und: $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$, für alle $n \geq 1$. Da ein Homomorphismus $T\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ offenbar genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $T = \pm\mathrm{id}$ (d.i. $d = 1$) ist, ist ein Isomorphismus von $H_n(\mathbb{S}^n)$ nach $\mathbb{Z}$ bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Deshalb ist die folgende Definition wohldefiniert.

Definition 3.3.8 Sei $n \geq 1$ und $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig. Der *Abbildungsgrad* $d = \deg(f)$ von f ist die eindeutig bestimmte Zahl $d \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $[z] \in H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ gilt:

$$f_*([z]) = d[z].$$

Bemerkung 3.3.9 *Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $f, g\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ stetig, so gilt:*

$$\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f).$$

Beweis. Für alle $[z] \in H_n(\mathbb{S}^n)$ gilt:

$$\begin{aligned}(g \circ f)_*([z]) &= g_*(f_*([z])) = g_*(\deg(f)[z]) = \deg(f)g_*([z]) \\ &= \deg(f)\deg(g)[z],\end{aligned}$$

also

$$\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f).$$

□

Kommentar 3.3.10 Wegen $\deg(\mathrm{id}) = 1$ folgt aus 3.3.9 unmittelbar, dass für einen Homöomorphismus gilt:

$$\deg(f^{-1}) = \deg(f)^{-1}$$

(insbesondere ist $\deg(f) = \pm 1$ (vgl. 3.3.7)).

Lemma 3.3.11 *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ die Spiegelung an einem Unterraum $E \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension n und $s = F|\mathbb{S}^n\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Dann gilt: $\deg(s) = -1$.*

Beweis. Eine Spiegelung F ist natürlich eine (lineare) Isometrie (bzgl. des kanonischen Skalarproduktes) von $\mathbb{R}^{n+1}$, $F \in \mathrm{O}(n+1)$, und bildet deshalb die Sphäre $\mathbb{S}^n = \{x : \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ in sich ab. (s ist also wohldefiniert.)

1. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis (ON-Basis) von E und $v_{n+1} \perp E$ mit Länge 1. Ist dann $T\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ die lineare Abbildung, die durch $T(e_j) = v_j$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ gegeben ist ($(e_1, \ldots, e_{n+1})$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$), so ist $T \in \mathrm{O}(n+1)$, denn $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ ist eine ON-Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$. Es ist dann $F_0 := T^{-1} \circ F \circ T$, die Spiegelung an der Ebene $E_0 := \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n)$,

$$F_0(e_j) = e_j \ (j = 1, \ldots, n), \ F(e_{n+1}) = -e_{n+1}.$$

Sei $s_0 := F_0|\mathbb{S}^n$ und $t := T|\mathbb{S}^n$. Es ist dann wegen 3.3.9 (und 3.3.10) und $s_0 = t^{-1}st$:

$$\deg(s_0) = \deg(t^{-1}) \deg(s) \deg(t) = \deg(s).$$

Es reicht also für s_0 zu zeigen, dass $\deg(s_0) = -1$ ist.

2. Sei nun $U = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$, $V = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ (S, N der Nord- bzw. der Südpol von $\mathbb{S}^n$, vgl. den Beweis von 3.3.1) und

$$\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbb{S}^n \cap E \simeq U \cap V$$

der Äquator. Wir betrachten nun die Mayer-Vietoris-Sequenzen zu den Ausschneidungspaaren (U, V) und (V, U). Weil $s(U) = V$ (und $s(V) = U$) ist, induziert s einen Morphismus zwischen den Sequenzteilen

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\Delta_{U,V}} H_{n-1}(U \cap V) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\Delta_{V,U}} H_{n-1}(V \cap U) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0$$

(für $n \geq 2$; für $n = 1$ ersetze man $H_0(\mathbb{S}^0)$ durch $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \{m[1] + n[-1] : m + n = 0\}$, vgl. auch Aufgabe 3.4.19). Weil $s|\mathbb{S}^{n-1} = \mathrm{id}$ ist, erhält man für die Isomorphismen $\Delta_{U,V}$ und $\Delta_{V,U}$:

$$s_* = \Delta_{V,U}^{-1} \circ \Delta_{U,V}.$$

Nach Konstruktion der Abbildung $\Delta_{U,V}$ in der Mayer-Vietoris-Sequenz (siehe Zusatz 3.2.31) ist aber für $z \in Z_n(\mathbb{S}^n)$ mit $B^r z = x + y$ (mit $r \in \mathbb{N}_0$, $x \in S_n(U)$, $y \in S_n(V)$):

$$\Delta_{U,V}([z]) = [\partial x]_{U \cap V} = -[\partial y]_{U \cap V},$$

$$\Delta_{V,U}([z]) = [\partial y]_{V \cap U} = -[\partial x]_{V \cap U}.$$

Also ist $\Delta_{V,U} = -\Delta_{U,V}$ und damit

$$s_* = -\Delta_{V,U}^{-1} \circ \Delta_{V,U} = -\mathrm{id}.$$

Wir erhalten somit $\deg(s) = -1$. □

Definition 3.3.12 Es heißt eine Abbildung $F\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein *Vektorfeld* auf $\mathbb{S}^n$, wenn für alle $x \in \mathbb{S}^n$ gilt (vgl. Abbildung 3.30):

$$\langle F(x), x \rangle = 0.$$

Abbildung 3.30: ein Vektorfeld auf der Sphäre

Satz 3.3.13 *Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so hat jedes stetige Vektorfeld auf $\mathbb{S}^n$ eine Nullstelle.*

Kommentar 3.3.14 (a) Für $n = 2$ spricht man vom „Igelsatz“: Man kann einen Igel nicht ohne Scheitel kämmen.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ ungerade gibt es nullstellenfreie Vektorfelder F, z.B. (mit $n =: 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$):

$$F(x_1, \ldots, x_{2k+2}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2k+2}, -x_{2k+1})$$

(vgl. Abb. 3.31).

Beweis von 3.3.13. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $F\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein stetiges Vektorfeld ohne Nullstellen. Dann können wir die stetige Abbildung $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$,

$$f(x) := \frac{F(x)}{\|F(x)\|},$$

Abbildung 3.31: ein nullstellenfreies Vektorfeld

betrachten. Es ist dann immer noch $\langle f(x), x\rangle = 0$, insbesondere also $f(x) \neq \pm x$, für alle $x \in \mathbb{S}^n$. Deshalb ist nun die geradlinige Verbindungsstrecke von $f(x)$ zu $\pm x$ in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$(1-t)f(x) \pm tx \neq 0, \quad \forall t \in [0,1],$$

denn

$$\|(1-t)f(x) \pm tx\|^2 = (1-t)^2\|f(x)\|^2 + t^2|x|^2 = (1-t)^2 + t^2 > 0.$$

Es ist deshalb $f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$ vermöge

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tx}{\|(1-t)f(x) + tx\|},$$

wie auch $f \simeq d_{\mathbb{S}^n}$ ist, mit der *Antipodenabbildung* $d := d_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $x \mapsto -x$, vermöge

$$(x,t) \mapsto \frac{(1-t)f(x) - tx}{\|(1-t)f(x) - tx\|}$$

(vgl. Abb. 3.32).

Sind nun $s_j : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ die Spiegelungen an den Koordinatenhyperebenen $(j = 1, \ldots, n+1)$, so ist

$$d = s_1 \circ \ldots \circ s_{n+1}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} 1 &= \deg(\mathrm{id}) = \deg(f) = \deg(d) \quad \text{wegen } \mathrm{id} \simeq f \simeq d \\ &= \deg(s_1 \circ \ldots \circ s_{n+1}) = \prod_{j=1}^{n+1} \deg(s_j) = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Also muss n ungerade sein. $\square$

Abbildung 3.32: die Homotopien nach id und d

Definition 3.3.15 Seien X und Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eine *Einbettung*, wenn für $f(X) \subseteq Y$ (mit der induzierten Topologie) gilt: $f\colon X \to f(X)$ ist ein Homöomorphismus.

Kommentar 3.3.16 (a) Ist speziell $X = \mathbb{B}^r$ ($r \in \mathbb{N}_0$), so spricht man von einem *(r-) Ball* B in Y, wenn $f\colon \mathbb{B}^r \to Y$ eine Einbettung und $B = f(\mathbb{B}^r)$ ist.

(b) Ist $X = \mathbb{S}^r$ ($r \in \mathbb{N}_0$) und $f\colon \mathbb{S}^r \to Y$ eine Einbettung, so nennt man $S := f(\mathbb{S}^r)$ eine *(r-) Sphäre* in Y. Insbesondere für $r = 1$ und $Y = \mathbb{R}^2$ heißt $C = f(\mathbb{S}^1) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine *Jordankurve* in $\mathbb{R}^2$.

Lemma 3.3.17 *Ist $B \subseteq \mathbb{S}^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) ein Ball, so ist $\mathbb{S}^n \setminus B$ azyklisch (insbesondere wegzusammenhängend).*

Kommentar 3.3.18 Man denke vor Allem an den Fall $r = 1$ und $n = 2$ (sowie $k = 0$ und $k = 1$), welches den *Jordanschen Kurvensatz* implizieren wird.

Beweis von 3.3.17. Sei $B = f(\mathbb{B}^r) \subseteq \mathbb{S}^n$ ($r, n \in \mathbb{N}_0$), wo $f\colon \mathbb{B}^r \to \mathbb{S}^n$ eine Einbettung ist. Wir führen Induktion über r:

$r = 0$: Es ist $\mathbb{B}^0 = \mathrm{pt}$ und mit $\{p\} = f(\mathbb{B}^0)$ ist dann

$$\mathbb{S}^n \setminus B = \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{B}^n$$

(z.B. via der stereographischen Projektion aus p heraus) und $\mathbb{B}^n$ ist azyklisch.

$r - 1 \to r$ (man denke an den Fall $0 \to 1$): Sei $X := \mathbb{S}^n \setminus B$, $z \in Z_k(X)$ für $k \in \mathbb{N}$ und sei $z = y - x$ mit $x, y \in X$, wenn $k = 0$ ist. Zu zeigen ist dann

$$\exists\, c \in S_{k+1}(X) : \ \partial c = z.$$

Denn dann ist für $k \geq 1$: $[z] = 0$, also $H_k(X) = 0$ und für $k = 0$: $H_0(X) = \operatorname{span}(x) \cong \mathbb{Z}$.

Schritt 1. Da für $I = [0, 1]$ sicher $\mathbb{B}^r \cong I^r$ ist, nehmen wir an, dass $B = f(I^r)$ für eine Einbettung $f\colon I^r \to \mathbb{S}^n$ ist. Für jedes $t \in I$ ist dann $B_t := f(I^{r-1} \times \{t\})$ ein $(r-1)$-Ball in $\mathbb{S}^n$. Nach Induktionsannahme existiert dann ein $c_t \in S_{k+1}(X_t)$, mit

$$X_t := \mathbb{S}^n \setminus B_t,$$

mit $z = \partial c_t$.

Weil die Glieder von c_t alle kompakte (und damit in $\mathbb{S}^n$ abgeschlossene) Bilder haben, existiert sogar eine offene Umgebung $U_t \subseteq \mathbb{S}^n$ von B_t (z.B. das Komplement vom Bild von c_t), so dass $c_t \in S_{k+1}(\mathbb{S}^n \setminus U_t)$ ist.

Ist nun $V_t := f^{-1}(U_t) \subseteq I^r$, so existiert wegen der Kompaktheit von I^{r-1} und wegen $I^{r-1} \times \{t\} \subseteq V_t$ eine offene Umgebung $I_t \subseteq I$ von t, so dass $I^{r-1} \times I_t \subseteq V_t$ ist (siehe Abbildung 3.33).

Abbildung 3.33: zu Schritt 1 von Lemma 3.3.17

Sei nun $\lambda > 0$ eine Lebesgue-Zahl für die offene Überdeckung $(I_t)_{t \in I}$ von I (vgl. Aufgabe 2.4.31) und $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \frac{1}{\lambda}$. Für jedes $j = 1, \ldots, m$ gibt es dann also ein $t_j \in I$, so dass

$$I_j := [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \subseteq I_{t_j}$$

ist. Setze nun

$$Q_j := f(I^{r-1} \times I_j)$$

und $c_j := c_{t_j}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Dann haben wir $c_j \in S_{k+1}(\mathbb{S}^n \setminus Q_j)$ und $\partial c_j = z$ für $j = 1, \ldots, m$.

2. Schritt. Es ist also
$$B = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$$
(o.E. sei $m \geq 2$); setze
$$X_j := \mathbb{S}^n \setminus Q_j.$$
Es ist nun (X_1, X_2) ein Ausschneidungspaar für $X_1 \cup X_2 = \mathbb{S}^n \setminus B_{1/m}$, also (nach Mayer-Vietoris) folgendes Sequenzstück exakt:
$$H_{k+1}(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\Delta} H_k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\mu} H_k(X_1) \oplus H_k(X_2)$$
mit
$$\mu([z]_{X_1 \cap X_2}) = ([z]_{X_1}, -[z]_{X_2}).$$
Nach Induktionsvoraussetzung ist aber $X_1 \cup X_2 = \mathbb{S}^n \setminus B_{1/m}$ azyklisch, $H_{k+1}(X_1 \cup X_2) = 0$; also ist μ injektiv. Weil aber
$$[z]_{X_1} = [\partial c_1]_{X_1} = 0, \ [z]_{X_2} = [\partial c_2]_{X_2} = 0$$
ist für unser $z \in Z_k(X)$, existiert deshalb ein
$$c_{12} \in S_{k+1}(X_1 \cap X_2) = S_{k+1}(\mathbb{S}^n \setminus (Q_1 \cup Q_2))$$
mit $\partial c_{12} = z$, denn $[z]_{X_1 \cap X_2} = 0$.

Wiederhole nun das Argument mit $\tilde{X}_1 := \mathbb{S}^n \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ und $X_3 = \mathbb{S}^n \setminus Q_3$. Dann existiert ein $c_{123} \in S_{k+1}(\mathbb{S}^n \setminus (Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3))$ mit $\partial c_{123} = z$. Setze schließlich
$$c := c_{123\ldots m} \in S_{k+1}(\mathbb{S}^n \setminus (Q_1 \cup \cdots \cup Q_m)) = S_{k+1}(\mathbb{S}^n \setminus B).$$
Es ist dann $\partial c = z$ (siehe Abbildung 3.34).

□

Satz 3.3.19 *Sei $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq n-1$ und $S \subseteq \mathbb{S}^n$ eine r-Sphäre. Dann gilt:*

(a) Für $0 \leq r \leq n-2$ ist:
$$H_k(\mathbb{S}^n \setminus S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \text{ und } k = n-r-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(b) Für $r = n-1$ ist:
$$H_k(\mathbb{S}^n \setminus S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Abbildung 3.34: zu Schritt 2 von Lemma 3.3.17

Korollar 3.3.20 *(Jordan-Brouwerscher Separationssatz). Ist $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-Sphäre $(n \in \mathbb{N})$, so besteht $\mathbb{R}^n \setminus S$ aus genau zwei Wegkomponenten.*

Kommentar 3.3.21 Insbesondere der Fall $n = 2$: Ist $C \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordan-Kurve, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus C$ genau zwei Wegkomponenten (*Jordanscher Kurvensatz*).

Beweis von 3.3.20. Für $n = 1$ ist die Aussage offenbar richtig, denn $\mathbb{S}^1$ ohne zwei Punkte ist homöomorph zu $\mathbb{R}^*$ und $\mathbb{R}^*$ hat genau zwei Wegkomponenten. Sei daher $n \geq 2$.

Sei $N \in \mathbb{S}^n$ der Nordpol und $\pi: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion. (Es ist dann π ein Homöomorphismus (vgl. Aufgabe 1.4.54).) Sei nun $f: \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung und $S = f(\mathbb{S}^{n-1})$. Dann ist $M := \pi^{-1}(S) \subseteq \mathbb{S}^n$ eine $(n-1)$-Sphäre und folglich $H_0(\mathbb{S}^n \setminus M) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nach 3.3.19, d.h.: $\mathbb{S}^n \setminus M$ besteht aus genau zwei Wegkomponenten,

$$\mathbb{S}^n \setminus M = U_1 \dot{\cup} U_2$$

mit sagen wir $N \in U_2$. Da $\mathbb{S}^n \setminus M \subseteq \mathbb{S}^n$ offen ist, ist auch $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{S}^n$ offen. Mit U_2 ist dann auch $U_2 \setminus \{N\}$ wegzusammenhängend (vgl. Aufgabe 3.4.31). Also sind $V_1 := \pi(U_1)$ und $V_2 := \pi(U_2 \setminus \{N\})$ wegzusammenhängend, $\mathbb{R}^n = V_1 \dot{\cup} V_2$ und es gibt auch keinen Weg von V_1 nach V_2 (weil es sonst auch einen von U_1 nach U_2 gäbe). $\mathbb{R}^n \setminus S$ hat also genau zwei Wegkomponenten. □

Beweis von 3.3.19. Wir führen Induktion über r:

$r = 0$: Es ist $\mathbb{S}^0 = \mathrm{pt} + \mathrm{pt}$, also $\mathbb{S}^n \setminus S = \mathbb{S}^n \setminus \{p, q\}$, für zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathbb{S}^n$. Wegen $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^n$ ist daher

$$\mathbb{S}^n \setminus S \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1},$$

da $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Deformationsretrakt ist. Dann folgt die Behauptung aus 3.3.1.

$r-1 \to r$: Sei

$$D^+ = \{z \in \mathbb{S}^r : \ z_{r+1} \geq 0\}, \quad D^- = \{z \in \mathbb{S}^r : \ z_{r+1} \leq 0\},$$

$f \colon \mathbb{S}^r \to S \subseteq \mathbb{S}^n$ eine Einbettung und $B^\pm := f(D^\pm) \subseteq S$. Dann ist $S = B^+ \cup B^-$ und $T := B^+ \cap B^- = f(D^+ \cap D^-)$ eine $(r-1)$-Sphäre in $\mathbb{S}^n$ (vgl. Abb. 3.35).

Abbildung 3.35: zum Beweis von Satz 3.3.19

Die Mayer-Vietoris-Sequenz für (U, V) mit $U := \mathbb{S}^n \setminus B^+$ und $V := \mathbb{S}^n \setminus B^-$ liefert wegen

$$U \cup V = \mathbb{S}^n \setminus (B^+ \cap B^-) = \mathbb{S}^n \setminus T,$$

$$U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus (B^+ \cup B^-) = \mathbb{S}^n \setminus S$$

für $k \geq 1$:

$$H_{k+1}(\mathbb{S}^n \setminus T) \cong H_k(\mathbb{S}^n \setminus S),$$

weil $U, V \subseteq \mathbb{S}^n$ nach Lemma 3.3.17 azyklisch sind. Nach Induktionsannahme ist deshalb

$$\begin{aligned} H_k(\mathbb{S}^n \setminus S) &\cong H_{k+1}(\mathbb{S}^n \setminus T) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k+1 = n-(r-1)-1 \\ 0 & \text{für } k \geq 1,\ k+1 \neq n-(r-1)-1 \end{cases} \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = n-r-1 \\ 0 & \text{für } k \geq 1,\ k \neq n-r-1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Für $k = 0$ hat man

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\nu} H_0(U \cup V) = H_0(\mathbb{S}^n \setminus T) \cong \mathbb{Z}$$

mit
$$\nu([x],[y]) = [x] + [y]$$
nach Induktionsvoraussetzung. Es ist damit
$$\ker(\nu) = \operatorname{span}(([x_0], -[x_0])) \cong \mathbb{Z}$$
mit $x_0 \in \mathbb{S}^n \setminus S$. Deshalb ist folgendes Sequenzstück kurz, exakt und spaltet, weil $\mathbb{Z}$ frei ist (vgl. 3.1.13):
$$0 = H_1(U) \oplus H_1(V) \to H_1(\mathbb{S}^n \setminus T) \xrightarrow{\Delta} H_0(\mathbb{S}^n \setminus S) \xrightarrow{\mu} \ker(\nu) \cong \mathbb{Z} \to 0.$$
Also ist
$$H_0(\mathbb{S}^n \setminus S) \cong H_1(\mathbb{S}^n \setminus T) \oplus \mathbb{Z}.$$
Für $r < n-1$ liefert die Induktionsvoraussetzung, dass $H_1(\mathbb{S}^n \setminus T) = 0$ ist, weil $n-(r-1)-1 = n-r \neq 1$ ist, also $H_0(\mathbb{S}^n \setminus S) = \mathbb{Z}$. Für $r = n-1$ ist dagegen $H_1(\mathbb{S}^n \setminus T) \cong \mathbb{Z}$, da nun $n-(r-1)-1 = n-r = 1$ ist. Es folgt nun tatsächlich:
$$H_0(\mathbb{S}^n \setminus S) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

$\square$

3.4 Aufgaben

Aufgaben zu 3.1: Kettenkomplexe

3.4.1 Zeigen Sie, dass die Kettenkomplexe mit den Kettenabbildungen eine Kategorie bilden und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Homologie H_k ein Funktor von dieser Kategorie in die Kategorie der abelschen Gruppen ist.

3.4.2 (a) Seien A und A' Objekte in der Kategorie der abelschen Gruppen **Ab** sowie C und C' zwei Objekte in der Kategorie **KK**. Zeigen Sie, dass es sowohl in **Ab** eine Summe von A und A' gibt, die wir mit $A \oplus A'$ bezeichnen, als auch in **KK** eine Summe von C und C' gibt, die wir auch mit $C \oplus C'$ bezeichnen.

(b) Zeigen Sie nun, dass der *Homologiefunktor* H_k ($k \in \mathbb{Z}$) (endliche) Summen respektiert, also (vermöge des natürlichen Morphismus') gilt:

$$H_k(C) \oplus H_k(C') \cong H_k(C \oplus C').$$

(c) Bestimmen Sie nun auch die (beliebigen) Summen in **KK** und **Ab** und zeigen Sie, dass H_k auch diese respektiert.

3.4.3 Sei X eine Menge. Wir betrachten die Menge $F(X)$ aller formalen Ausdrücke (genauer Abildungen von X nach $\mathbb{Z}$)

$$c = \sum_{x \in X} n_x x,$$

wo $n_x \in \mathbb{Z}$ ist, für alle $x \in X$, und nur in endlich vielen Fällen $n_x \neq 0$ sei. Wir machen $F(X)$ zu einer abelschen Gruppe vermöge der Verknüpfung

$$\sum n_x x + \sum m_x x := \sum (n_x + m_x)x.$$

$(F(A), +)$ heißt die von X erzeugte *freie abelsche Gruppe*. Die Kardinalität $\mathrm{card}(M)$ von M heißt dann ihr *Rang*.

(a) Zeigen Sie, dass $F(X)$ zusammen mit der *natürlichen Inklusion* $i\colon X \to F(X)$, $i(x) = x$ (der formale Ausdruck $\sum_y n_y y$, der nur bei $y = x$ den Koeffizienten $n_x = 1$ hat, sonst Null), folgende *universelle Eigenschaft* erfüllt: Ist A eine abelsche Gruppe und $j\colon X \to A$ eine Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi\colon F(X) \to A$ mit $\Phi \circ i = j$ (siehe Diagramm 3.36).

Abbildung 3.36: universelle Eigenschaft der frei abelschen Gruppe

Abbildung 3.37: der induzierte Homomorphismus

(b) Seien X und Y Mengen, $i_X\colon X \to F(X)$ und $i_Y\colon Y \to F(Y)$ die natürlichen Inklusionen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es genau einen Homomorphismus $f_* = F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ gibt mit $f_* \circ i_X = i_Y \circ f$ (siehe Diagramm 3.37).

(c) Zeigen Sie, dass $F\colon \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ab}$, $X \to F(X)$, $f \to F(f)$, ein Funktor ist (vgl. auch Aufgabe 2.4.29).

3.4.4 Sei $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Beweisen Sie die Exaktheit der zugehörigen langen Homologiesequenz an den Stellen $H_k(C)$ und $H_k(C'')$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

3.4.5 Seien F und G Funktoren zwischen zwei Kategorien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$. Eine *natürliche Transformation* Φ zwischen F und G ordnet jedem Objekt X_1 in $\mathcal{C}_1$ einen Morphismus $\Phi \in \mathrm{Mor}(F(X_1), G(X_1))$ in $\mathcal{C}_2$ derart zu, dass für jedes $f \in \mathrm{Mor}(X_1, Y_1)$ in $\mathcal{C}_1$ gilt (vgl. Diagramm 3.38):

$$\Phi(Y_1)F(f) = G(f)\Phi(X_1).$$

Abbildung 3.38: eine natürliche Transformation

(a) Zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist der verbindende Homomorphismus $(\partial_*)_k$ eine natürliche Transformation zwischen den Funktoren H''_k und H'_{k-1}, die von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen $\mathbf{KES} - \mathbf{KK}$ in die Kategorie $\mathbf{Ab}$ der abelschen Gruppen gehen.

(b) Zeigen Sie nun, dass das Bilden der langen Homologiesequenz ein Funktor von $\mathbf{KES} - \mathbf{KK}$ in die Kategorie der langen exakten Sequenzen abelscher Gruppen $\mathbf{LES}$ ist.

3.4.6 Ein Kettenkomplex C heißt *(ketten-) zusammenziehbar*, wenn die Identität id_C auf C (ketten-) homotop zur Nullabbildung 0_C ist, $\mathrm{id}_C \simeq 0_C$. Zeigen Sie, dass für einen zusammenziehbaren Komplex C sämtliche Homologiegruppen verschwinden (man sagt: C ist *azyklisch*), $H_k(C) = (0)$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.

3.4.7 Sei $C = (C_k, \partial_k)$ ein Kettenkomplex und $C' \subseteq C$ ein Unterkomplex. Der *Quotientenkomplex* C/C' ist definiert durch

$$(C/C')_k := C_k/C'_k$$

und $\partial([c]) := [\partial c]$.

(a) Zeigen Sie, dass ∂ auf C/C' wohldefiniert ist und C/C' tatsächlich zu einem Kettenkomplex macht.

(b) Zeigen Sie, dass die kanonische Projektion $\pi = (\pi_k)$, $\pi_k\colon C_k \to C_k/C'_k$, eine Kettenabbildung ist, die zusammen mit der Inklusion $i\colon C' \to C$ die folgende Sequenz zwischen Kettenkomplexen exakt werden lässt:

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C/C' \longrightarrow 0.$$

(c) Zeigen Sie: Sind zwei der Komplexe C, C', C/C' azyklisch, so auch der dritte.

3.4.8 Sei $C = (C_k, \partial_k)$ ein nicht-negativer Kettenkomplex. Eine *Augmentierung* von C ist ein surjektiver Homomorphismus $\varepsilon\colon C_0 \to \mathbb{Z}$ mit $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$. Der *reduzierte Kettenkomplex* eines *augmentierten Kettenkomplexes* (C, ε) ist der Teilkomplex $\tilde{C} \subseteq C$ mit $\tilde{C}_k := C_k$ für $k \geq 1$ und $\tilde{C}_0 := \ker(\varepsilon)$. Man setzt $\tilde{H}(C) := H(\tilde{C})$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} H_0(C) &\cong \tilde{H}_0(C) \oplus \mathbb{Z}, \\ H_k(C) &\cong \tilde{H}_k(C) \text{ für } k \geq 1. \end{aligned}$$

3.4.9 Sei ε eine Augmentierung eines nicht-negativen Kettenkomplexes C. Sei $\underline{\mathbb{Z}}$ der Kettenkomplex, der an der Stelle $k = 0$ aus $\mathbb{Z}$ besteht und sonst überall aus der Nullgruppe. Zeigen Sie:

(a) Eine Augmentierung ε von C kann als eine surjektive Kettenabbildung von C nach $\underline{\mathbb{Z}}$ aufgefasst werden (und umgekehrt).

(b) Ist $\varepsilon\colon C \to \underline{\mathbb{Z}}$ eine *Kettenäquivalenz* (d.h.: es gibt eine Kettenabbildung $\tau\colon \underline{\mathbb{Z}} \to C$ mit $\varepsilon \circ \tau \simeq \mathrm{id}_{\underline{\mathbb{Z}}}$ und $\tau \circ \varepsilon \simeq \mathrm{id}_C$), so ist der reduzierte Kettenkomplex zusammenziehbar.

Aufgaben zu 3.2: Die singulären Homologiegruppen

3.4.10 Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass der Kettenkomplex-Funktor $S\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{KK}$ und damit auch die Komposition $H_k \circ S\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ (beliebige) Summen respektiert.

3.4.11 Sei X ein topologischer Raum, $S(X)$ sein singulärer Kettenkomplex und $\varepsilon\colon S(X) \to \underline{\mathbb{Z}}$ gegeben auf den singulären 0-Simplexen (also den Punkten von X) durch $\varepsilon(x) = 1$, $x \in X$.

(a) Zeigen Sie, dass ε eine Augmentierung von $S(X)$ ist (vgl. Aufgabe 3.4.8 und Aufgabe 3.4.9), wenn X nicht-leer ist.

(b) Zeigen Sie, dass für die *reduzierte Homologie* $\tilde{H}(X)$ (vgl. Aufgabe 3.4.8) gilt: $\tilde{H}_0(X) = 0$ genau dann, wenn X wegzusammenhängend ist.

3.4.12 Sei X ein topologischer Raum, Δ_1 und Δ_2 die Standard-Simplexe in den Dimensionen $k = 1$ und $k = 2$ und $\alpha\colon \Delta_1 \to X$ ein singulärer 1-Simplex. Sei weiter $\alpha^-\colon \Delta_1 \to X$ der rückwärts durchlaufene 1-Simplex, d.h.: $\alpha^-(\lambda_0, \lambda_1) = \alpha(\lambda_1, \alpha_0)$, für alle $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) \in \Delta_1$. Zeigen Sie, dass die Differenz $c_1 = \alpha^- - \alpha$ in $S_1(X)$ ein singulärer Rand ist, also $\alpha^- - \alpha = \partial_2(c_2)$ für eine singuläre 2-Kette $c_2 \in S_2(X)$. (Hinweis: Betrachten Sie das singuläre 2-Simplex $\sigma\colon \Delta_2 \to X$ gegeben durch $\sigma(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = \alpha(\lambda_2, \lambda_0 + \lambda_1)$.)

3.4.13 Sei X ein zusammenziehbarer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass dann sein reduzierter singulärer Kettenkomplex (vgl. Aufgaben 3.4.8 und 3.4.11) (ketten-) zusammenziehbar ist (vgl. Aufgabe 3.4.6).

3.4.14 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum. Zeigen Sie (für jedes $k \in \mathbb{N}_0$):

(a) Ist $A \subseteq X$ ein Retrakt, so ist $i_*\colon H_k(A) \to H_k(X)$ injektiv.

(b) Ist $A \subseteq X$ ein Deformationsretrakt, so ist i_* sogar ein Isomorphismus.

3.4.15 Zeigen Sie, dass folgende topologische Räume die gleichen Homologiegruppen haben:

(a) $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ und $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ (*Volltorus*), $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (Zylinder) und $\mathbb{M}$ (Möbiusband);

(b) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{O}(n)$ (Hinweis: Polarzerlegung nicht-singulärer Matrizen).

3.4.16 Zeigen Sie, dass es keinen surjektiven Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ gibt.

3.4.17 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum. Der Quotientenkomplex (vgl. Aufgabe 3.4.7) $S(X,A) := S(X)/S(A)$ der singulären Kettenkomplexe von X bzw. A heißt der *singuläre Kettenkomplex des Raumpaares* (X,A). Bezeichnet $i\colon S(A) \to S(X)$ die Inklusion und $\pi\colon S(X) \to S(X,A)$ die kanonische Projektion, so zeigen Sie, dass es eine lange exakte Homologiesequenz (der Raumpaares (X,A)) wie folgt gibt:

$$\ldots \xrightarrow{\pi_*} H_{k+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{\pi_*} H_k(X,A) \xrightarrow{\partial_*} \ldots .$$

3.4.18 Beweisen Sie mit Hilfe des Lemmas über kleine Ketten den *Ausschneidungssatz* der (singulären) Homologietheorie: Ist X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Teilraum und $U \subseteq A$ derart, dass $\bar{U} \subseteq \operatorname{int}(A)$ ist, so induziert die Inklusion von Raumpaaren $i\colon (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ einen Isomorphismus in der Homologie,

$$i_*\colon H(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H(X,A).$$

3.4.19 Sei X ein topologischer Raum und $U, V \subseteq X$ offen mit $U \cup V = X$. Zeigen Sie die Existenz einer Mayer-Vietoris-Sequenz auch für die reduzierten Homologien von $U \cap V$, U, V und X (vgl. Aufgabe 3.4.8 und 3.4.11).

Aufgaben zu 3.3: Anwendungen

3.4.20 Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Homologie eines Buketts von n Kreislinien $X = \mathbb{S}^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1$ (n-mal), insbesondere die Homologie der Figur Acht ($n = 2$).

3.4.21 Sei $g \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{F}_g$ die geschlossene, orientierte Fläche vom Geschlecht g. Berechnen Sie die Homologie von $\mathbb{F}_g$, insbesondere die des 2-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^2$ ($g = 1$).

3.4.22 Berechnen Sie die Homologie der Kleinschen Flasche.

3.4.23 Berechnen Sie die Homologie der reell-projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

3.4.24 (a) Berechnen Sie die Homologie des 3-dimensionalen reell-projektiven Raumes $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ und des 3-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^3$.

(b) Berechnen Sie nun die Homologien von $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ und $\mathbb{T}^n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

3.4.25 Seien X und Y zusammenhängende Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass für die zusammenhängende Summe $M = X \sharp Y$ (vgl. Aufgabe 2.4.34) gilt:

$$H_1(M) \cong H_1(X) \oplus H_1(Y).$$

3.4.26 Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$H_k(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

3.4.27 Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathrm{pot}_n \colon \mathbb{S}^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$.

(a) Zeigen Sie, dass der Abbildungsgrad von pot_n nach Definition 3.3.8 gerade n ist.

(b) Zeigen Sie nun, dass die Definitionen 2.1.14 und 3.3.8 für den Abbildungsgrad einer stetigen Abbildung $f \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ äquivalent sind.

3.4.28 Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass eine *Rotation* $A \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ (d.h.: $A \in \mathrm{SO}(n+1)$) den Abbildungsgrad 1 hat, $\deg(A) = 1$. (Hinweis: $\mathrm{SO}(n+1)$ ist wegzusammenhängend.)

3.4.29 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung mit $\deg(f) \neq 0$. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

3.4.30 (a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ gerade. Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ einen Fixpunkt oder einen Antipodenpunkt hat.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade. Geben Sie eine stetige Abbildung $f \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ohne Fix- und Antipodenpunkte an.

3.4.31 Sei $n \geq 2$ und $U \subseteq \mathbb{S}^n$ offen und wegzusammenhängend. Zeigen Sie, dass für jedes $p \in U$ auch $U \setminus \{p\}$ wegzusammenhängend ist.

3.4.32 Eine 1-Sphäre $K \subseteq \mathbb{S}^3$ heißt ein *Knoten*. Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ disjunkte Knoten, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, und $i \colon K_1 \to \mathbb{S}^3 \setminus K_2$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass es genau eine ganze Zahl $d \in \mathbb{Z}$ gibt, so, dass $i_* \colon H_1(K_1) \to H_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_2)$ Multiplikation mit d ist,

$$i_*([z]) = d[z],$$

für alle $z \in Z_1(K_1)$. ($d =: \mathrm{lk}(K_1, K_2)$ heißt die *Verschlingungszahl* von K_1 und K_2.)

3.4.33 Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{S}^3$ die (*trivialen*) Knoten (vgl. Aufgabe 3.4.32)

$$K_1 = \{(z, w) \in \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2 : \ w = 0\}, \ K_2 = \{(z, w) \in \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2 : \ z = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass K_1 und K_2 *verschlungen* sind, d.h.: $\mathrm{lk}(K_1, K_2) \neq 0$. (Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $r \colon \mathbb{S}^3 \setminus K_2 \to K_1$, $(z, w) \mapsto \frac{(z,0)}{|z|}$.)

Literaturverzeichnis

[1] T. tom Dieck: *Algebraische Topologie*, de Gruyter-Verlag.

[2] A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press.

[3] W. Lück: *Algebraische Topologie*, Vieweg-Verlag.

[4] H. Schubert: *Categories*, Springer-Verlag.

[5] H. Schubert: *Topologie*, Teubner-Verlag.

[6] E. H. Spanier: *Algebraic Topology*, Springer-Verlag.

[7] R. Stöcker, H. Zieschang: *Algebraische Topologie*, Teubner-Verlag.

Abbildungsverzeichnis

Index