Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
David Seez

SS 2024
24.04.2024
Blatt 02

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Aufgabe 05.

(a) Sei $C = (C_k, \partial_k)_k$ ein Kettenkomplex. Ein *Unterkomplex von* C ist eine Familie $(C'_k)_k$ von Untergruppen $C'_k \subseteq C_k$, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\partial_k(C'_k) \subseteq C'_{k-1}$. Zeigen Sie, dass (C'_k) zusammen mit den Einschränkungen $\partial'_k := C'_k \to C'_{k-1}$ selbst zu einem Kettenkommplex wird. WIr bezeichnen ihn mit $C' = (C'_k, \partial'_k)_k$ und schreiben $C' \subseteq C$. Zeigen Sie weiter, dass $i = (i_k : C'_k \to C_k)_k$ eine Kettenabbildung ist, wo $i_k : C'_k \to C_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ die natürlichen Inklusionen sind. Wir nennen sie die *natürliche Inklusion*.

(b) Sei nun C ein Kettenkomplex und $C' \subseteq C$ ein Unterkomplex. Sei weiter $\pi = (\pi_k : C_k \to C_k/C'_k$ die Familie der natürlichen Projektionen auf die Quotientengruppen $\bar{C}_k := C_k/C'_k$. Zeigen Sie, dass $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ einen (eindeutig bestimmten) Homomorphismus $\bar{\partial}_k : \bar{C}_k \to \bar{C}_{k-1}$ induziert mit $\bar{\partial}_k \circ \pi_k = \pi_{k-1} \circ \partial_k$. Zeigen Sie weiter, dass $\bar{C} = (\bar{C}_k, \bar{\partial}_k)$ ein Kettenkomples wird, den wir den *von* $C' \subseteq C$ *induzierten Quotientenkomplex* nennen, und dass $\pi : C \to \bar{C}$ eine Kettenabbildung ist. Formulieren Sie eine *universelle Eigenschaft* für das Paar $(\bar{C}, \pi)$.

(c) Sei C ein Kettenkomplex, $C' \subseteq C$ ein Unterkomplex sowie $i : C' \to C$ die natürliche Inklusion und $\pi : C \to \bar{C} = C/C'$ die natürliche Projektion.. Zeigen Sie, dass dann die kurze Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} \bar{C} \longrightarrow 0$$

exakt ist.

(d) Ein Kettenkomplex C heißt *azyklisch*, wenn für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $H_k(C) = (0)$. Zeigen Sie: Ist C ein Kettenkomplex, $C' \subseteq C$ ein Unterkomplex und $\bar{C} = C/C'$ der induzierte Quotientenkomplex, und sind zwei dieser drei Kettenkomplexe azyklisch, so auch der dritte.

Aufgabe 06. Sei $C = (C_k, \partial_k)$ ein *nicht-negativer* Kettenkomplex, d.h.: $C_k = (0)$, für alle $k < 0$..

(a) Eine *Augmentierung von* C ist ein surjektiver Homomorphismus $\varepsilon : C_0 \to \mathbb{Z}$ mit $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$. Sei weiter $\underline{\mathbb{Z}}$ der Kettenkomplex, der an der Stelle $k = 0$ aus $\mathbb{Z}$ besteht und sonst überall aus der Nullgruppe (und damit überall trivialen Randoperatoren). Zeigen Sie, dass eine Augmentierung von C auch als eine surjektive Kettenabbildung von C nach $\underline{\mathbb{Z}}$ aufgefasst werden kann.

(b) Der *reduzierte Kettenkomplex eines augmentierten Kettenkomplexes* (C, ε) ist der Unterkomplex $\tilde{C} \subseteq C$ mit $\tilde{C}_k = C_k$, für $k > 0$ und $\tilde{C}_0 = \ker(\varepsilon)$. Man setzt $\tilde{H}(C, \varepsilon) := H(\tilde{C})$ (und lässt ε weg, wenn der Bezug klar ist). Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} H_0(C) &\cong \tilde{H}_0(C) \oplus \mathbb{Z} \\ H_k(C) &\cong \tilde{H}_k(C) \text{ für } k \geq 1 \end{aligned}$$

(Hinweis: Erinnern Sie sich an den Begriff der *Spaltung einer kurzen exakten Sequenz.*)

Aufgabe 07. Sei X ein topologischer Raum und $S(X)$ sein singulärer Kettenkomplex. Sei $\varepsilon \colon S(X) \to \underline{\mathbb{Z}}$ auf den singulären Nullsimplexen, welche wir mit den Punkten in X identifizieren, gegeben durch $\varepsilon(x) = 1$, für alle $x \in X$.

(a) Zeigen Sie: Ist $X \neq \emptyset$, so ist ε eine Augmentierung von $S(X)$ (vgl. Aufgabe 06).

(b) Zeigen Sie nun, dass für *die reduzierte singuläre Homologie von* X, $\tilde{H}(X) := \tilde{H}(S(X), \varepsilon)$, gilt: X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn $\tilde{H}_0(X) = (0)$ ist.

Aufgabe 08.

(a) Ein Kettenkomplex C heißt *(ketten-) zusammenziehbar*, wenn die Identität id_C auf C (ketten-) homotop zur Nullabbildung 0_C ist, $\mathrm{id}_C \simeq 0_C$. Zeigen Sie, dass ein zusammenziehbarer Kettenkomplex azyklisch ist (vgl. Aufgabe 05).

(b) Sei X ein zusammenziehbarer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass dann sein reduzierter singulärer Kettenkomplex $\tilde{S}(X)$ zusammenziehbar (vgl. Aufgabe 07) und damit *der topologische Raum azyklisch* ist. (Wir nennen einen topologischen Raum *azyklisch*, wenn sein reduzierter singulärer Kettenkomples azyklisch ist. X hat dann „keine wesentlichen Zykel".)

Abgabe: Dienstag, den 30.04.2024 bis 18 Uhr via „urm"