Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
David Seez

SS 2024
03.05.2024
Blatt 03

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Aufgabe 09. Sei $C = (C_k, \partial_k)$ ein *freier* Kettenkomplex. Zeigen Sie: Ist C azyklisch, so ist C bereits (ketten-)zusammenhiehbar. (Hinweis: Sei $\sigma_{k-1}\colon Z_{k-1} = B_{k-1} \to C_k$ ein Rechtsinverses zu $\partial_k\colon C_k \to B_{k-1}$. Setze dann $D_k\colon C_k \to C_{k+1}$,

$$D_k := \sigma_k \circ (\mathrm{id} - \sigma_{k-1} \circ \partial_k).)$$

Aufgabe 10. Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Teilraum und $i\colon A \to X$ die Inklusion. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subseteq X$ ein Retrakt, so ist $i_*\colon H_k(A) \to H_k(X)$ injektiv, für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Ist $A \subseteq X$ ein Deformationsretrakt, so ist i_* sogar ein Isomorphismus.

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass folgende topologische Räume isomorphe Homologiegruppen haben:

(a) $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ (Volltorus), $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (Zylinder) und $\mathbb{M}$ (Möbiusband)

(b) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{O}(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) (Hinweis: Polarzerlegung nicht-singulärer Matrizen)

Abgabe: Dienstag, den 07.05.2024 bis 18 Uhr via „urm“