Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
David Seez

SS 2024
10.05.2024
Blatt 04

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Aufgabe 12. Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum. Der Quotientenkomplex (vgl. Aufgabe 05) $S(X, A) := S(X)/S(A)$ der singulären Kettenkomplexe von X bzw. A heißt der *singuläre Kettenkomplex des Raumpaares* (X, A).

(a) Definieren Sie in naheliegender Weise eine Kategorie $\mathbf{Top}_2$ von *topologischen Raumpaaren* und Funktoren $H_k\colon \mathbf{Top}_2 \to \mathbf{Ab}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Was sind wohl die Morphismen in $\mathbf{Top}_2$?

(b) Zeigen Sie, dass es für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine natürliche Transformation $(\partial_*)_k$ vom Funktor $F\colon \mathbf{Top}_2 \to \mathbf{Ab}$ nach $G\colon \mathbf{Top}_2 \to \mathbf{Ab}$ gibt, wo F und G auf den Objekten (X, A) von $\mathbf{Top}_2$ durch $F(X, A) = H_k(X, A)$ und G durch $G(X, A) = H_{k-1}(A)$ gegeben ist. Beschreiben Sie für eine Homologieklasse $[\bar{c}] \in H_k(X, A)$, für eine repräsentierende Kette $c \in S_k(X)$, möglichst konkret, wodurch $(\partial_*)_k([\bar{c}])$ gegeben ist.

(c) Bezeichne nun $i\colon S(A) \to S(X)$ die Inklusion und $\pi\colon S(X) \to S(X, A)$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Homologiesequenz (des Raumpaares (X, A)) gibt, die ein Funktor von $\mathbf{Top}_2$ in die Kategorie der langen exakten Sequenzen **LES** von abelschen Gruppen ist:

$$\cdots \xrightarrow{(\pi_*)_{k+1}} H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{(\partial_*)_{k+1}} H_k(A) \xrightarrow{(i_*)_k} H_k(X) \xrightarrow{(\pi_*)_k} H_k(X, A) \xrightarrow{(\partial_*)_k} \cdots$$

Aufgabe 13. Beweisen Sie mit Hilfe des Lemmas über Kleine Ketten den *Ausschneidungssatz der (singulären) Homologietheorie*: Ist X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Teilraum und $U \subseteq A$ derart, dass $\bar{U} \subseteq \operatorname{int}(A)$ ist (wo $\operatorname{int}(A) \subseteq A$ das Innere von A bezeichnet), so induziert die Inklusion von Raumpaaren $i\colon (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ einen Isomorphismus in der Homologie,

$$i_*\colon H_(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H(X, A).$$

Aufgabe 14. Sei X ein topologischer Raum und $U, V \subseteq X$ offen mit $U \cup V = X$. Zeigen Sie die Existenz einer Mayer-Vietoris-Sequenz auch für die reduzierten Homologien von $U \cap V$, U, V und X (vgl. Aufgaben 06 und 07).

Abgabe: Dienstag, den 14.05.2024 bis 18 Uhr via „urm“