

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 5 (Abgabe spätestens 30.05.2024, 10:00)

Aufgabe 18

(22 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 19

(4 Punkte)

Geben Sie für jede der Matrizen aus Aufgabe 18 an, ob sie diagonalisierbar ist – mit minimaler(!) Begründung.

Aufgabe 20

(7 Zusatzpunkte)

Diagonalisieren Sie zwei der Matrizen aus Aufgabe 18, d.h. bestimmen Sie für jede der beiden von Ihnen gewählten Matrizen eine reguläre Matrix S , so dass $S^{-1}XS$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von X ist (wobei X jeweils eine der von Ihnen gewählten Matrizen A, B, C oder D ist). Rechnen Sie für eine der gewählten Matrizen explizit nach, dass $S^{-1}XS$ tatsächlich diagonal ist.

Aufgabe 21

(10 Zusatzpunkte)

Wir schreiben die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{*}$$

als ein DGL-System 1. Ordnung (vgl. Vorlesung). Definieren Sie dazu

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

und suchen Sie eine Matrix A , so dass $\vec{u}' = A\vec{u}$ äquivalent zu (*) wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL (*).

Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare). Schreiben Sie nun die DGL aus Aufgabe 17 als DGL-System 1. Ordnung. Vergleichen Sie auch hier das charakteristische Polynom der DGL mit dem charakteristischen Polynom der im DGL-System auftretenden Matrix.