Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2024

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 15.10.2024

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 98 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+10 = 14 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{8x^2-4x-8}{(x^2-4)x^2}\,\mathrm{d}x$ Hinweis: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y\,y' + 3x\,(1+y^2) = 0,\ y(0) = -1$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 4y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 4y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 4y = \sin(2x)$.

Aufgabe 4 (1+1+6+4+2 = 14 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ist A symmetrisch?
b) Ist A unitär?
c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
d) Bestimmen Sie $A^n\vec{x}$ für $n \geq 0$.
Hinweis: Schreiben Sie $\vec{x}$ als Linearkombination der Eigenvektoren von A.
e) Berechnen Sie $\log_2\left(\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)\cdot(A^n\vec{x})\right)$.

Aufgabe 5 (8 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{5\times5}$ hermitesch und kein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix. Weiter gelte $A^2 = 7A$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Sei $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{K}$ ein Kreis mit Radius 3 um den Ursprung, der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = (x+y)^3 - 3(x+y) + (x-y)^2\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen, und berechnen Sie die zugehörigen Funktionswerte.
Hinweis: Es ist hilfreich, $f_x - f_y$ zu betrachten.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Bestimmen Sie Minimum und Maximum von $f(x,y) = xy + \frac{1}{4}$ unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 = 1$. Wo werden Minimum und Maximum jeweils angenommen?

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich

$$xyz + x^2 \cos z = \mathrm{e}^{1-y}$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,0)$ nach $z = f(x,y)$ auflösen lässt, und berechnen Sie $(\nabla f)(1,1)$.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Berechnen Sie $|\mathcal{T}| = \int_{\mathcal{T}} \mathrm{d}V$, wobei

$$\mathcal{T} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} (2 + r\sin u)\cos v \\ (2 + r\sin u)\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix}\,,\ 0 \le r \le 1\,,\ 0 \le u < 2\pi\,,\ 0 \le v < 2\pi \right\}.$$