Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 10

Aufgabe 1: Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und gleich verteilter Zufallsvariablen, mit $\tau := \mathbb{E}(X_n^4) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, unter Verwendung der Markov-Ungleichung mit $f(x) = x^4$, dass die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq a) \leq \frac{3\tau}{n^2 a^4}$.

Aufgabe 2: Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_1 \equiv 1$ und $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^2}$ sowie $\mathbb{P}(X_n = n^3) = \frac{1}{n^2}$.

Zeigen Sie, dass die Folge sowohl stochastisch als auch fast sicher gegen 1 konvergiert. Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \infty$.

Aufgabe 3: Es sei $\Omega = [0, 1[$ und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω . Finden Sie eine Folge von Ereignissen A_n , so dass $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) = \infty$ aber die Wahrscheinlichkeit, dass unendlich viele der Ereignisse A_j eintreten, Null ist.

Aufgabe 4: Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y und deren Verteilungsfunktionen V_X und V_Y .

- (a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $\max\{X, Y\}$ sowie $\min\{X, Y\}$ als Funktionen von V_X und V_Y .
- (b) Nemen Sie nun an, X und Y seien auf $[0, 1[$ gleichverteilt. Wie lauten die Verteilungsfunktionen von X/Y und $X + Y$?

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bis spätestens 08.07.2024 um 14:00 über URM ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben.