

# Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

## Blatt 2

**Aufgabe 1:** Ein Laplace-Würfel wird zweimal geworfen. Betrachten Sie die Ereignisse  $A$ : “Der erste Wurf zeigt eine gerade Augenzahl”,  $B$ : “Der zweite Wurf zeigt eine gerade Augenzahl” und  $C$ : “Die Summe der Augenzahlen beider Würfel ist gerade”. Zeigen Sie, dass die Ereignisse  $A$ ,  $B$ ,  $C$  paarweise unabhängig sind, jedoch  $A$  von  $B \cap C$  abhängt.

**Aufgabe 2:** Gegeben Sei eine Menge  $\Omega$  und eine zugehörige  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$ . Zeigen Sie

- (a) Für zwei beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbb{Q} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie  $0 \leq a \leq 1$  ist  $\mathbb{S} := a\mathbb{P} + (1 - a)\mathbb{Q}$  ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{A}$ .
- (b) Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  ist monoton wachsend in dem Sinne, dass  $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .

**Aufgabe 3:** Es sei  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  definiert durch  $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A$  oder  $A^c$  ist abzählbar. Zeigen Sie:

- (a)  $\mathcal{A}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.
- (b)  $\mathcal{A}$  ist die von allen einelementigen Teilmengen von  $\mathbb{R}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

**Aufgabe 4:** Gegeben Sei eine Menge  $\Omega$ , eine zugehörige  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  und eine Folge von Ereignissen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ . Es sei  $B_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ ,  $C_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ . Zeigen Sie:

- (a)  $B_n$  ist eine aufsteigende,  $C_n$  eine absteigende Folge von Ereignissen.
- (b)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$
- (c) Die Menge  $B_n$  kann auf folgende Weise alternativ definiert werden:

$$x \in B_n \Leftrightarrow \forall k \geq n \text{ gilt: } x \in A_k .$$

Geben Sie auf ähnliche Weise alternative Definitionen der Mengen  $C_n$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$  an, die statt der Symbole  $\cap$  und  $\cup$  Quantoren benutzt.

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bis spätestens 06.05.2024 um 14:00 über URM ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben.