MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN SoSe 2024

Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 4

Aufgabe 1: Gegeben sei die σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Blatt 2 Aufgabe 3. Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die nicht $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-meßbar ist. Beweisen Sie ihre Aussage.

Aufgabe 2: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $B \in \mathcal{A}$ ein Ereignis. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ aller von B unabhängigen Ereignisse ein Dynkin-System ist.

Aufgabe 3: Es sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. $\mathcal{B}$ sei hier die Borel'sche-σ-Algebra und $\mathbb{P}\left(]-\infty, a]\right) := \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ für eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int f(t)dt = 1$ gegeben.

Es sei $X : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ die Zufallsgröße gegeben durch $X(t) := \arctan(t)$ Zeigen Sie, dass $g(t) := f(\tan(t))(\cos(t))^{-2}$ für $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ die zu $\mathbb{Q} := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Die Meßbarkeit von X soll hier nicht thematisiert werden. Diese dürfen Sie einfach voraussetzen.

Aufgabe 4: (Bertrand Paradoxon) Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt M und drei Punkte auf der Kreislinie, die ein gleichseitiges Dreieck bilden. Man wähle nun zufällig eine Sehne nach verschiedenen Regeln (a), (b) und (c) aus. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällig gewählte Sehne länger ist als eine Seite des Dreiecks.

(a) Man wählt unabhängig und gleichverteilt zwei beliebige Punkte auf der Kreislinie und verbindet diese zu einer Sehne.

(b) Man wählt einen beliebigen Punkt P auf der Kreisscheibe und verbindet diesen mit dem Kreismittelpunkt M. Dann wählt man gleichverteilt einen Punkt auf der Strecke PM aus. Man betrachte die durch diesen Punkt verlaufende Sehne, die senkrecht auf PM steht.

(c) Man wählt gleichverteilt einen Punkt I im Kreisinneren aus. Man betrachte die Sehne, die durch I verläuft und auf MI senkrecht steht.

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bis spätestens 27.05.2024 um 14:00 über URM ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben.