

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 3 (Abgabe spätestens 08.05.2025, 10:00)

Aufgabe 9

(15 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Berechnen Sie dazu zunächst die Lösungen der jeweiligen homogenen Gleichung. Eine partikuläre Lösung finden Sie dann entweder durch Raten oder durch Variation der Konstanten.

a) $y' + 3y = 25$ b) $y' + 3y = e^{-x}$ c) $y' + 3y = e^{-3x}$ d) $y' + 3y = x^2 - 1$

Aufgabe 10

(9 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen.

a) $y' + xy = 0$ b) $y' - 2\sin(x)y = 0$ c) $y' - 2\sin(x)y = \sin(x)$

Aufgabe 11

(2+3+5 = 10 Zusatzpunkte)

Wir möchten das AWP

$$y' = \frac{3y}{x} - y^2 - \frac{3}{x^2}, \quad y(1) = \frac{5}{3}$$

lösen.

- a) Rechnen Sie nach, dass $y(x) = \frac{1}{x}$ die DGL löst (aber nicht das AWP).
b) Nun definieren wir u durch

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{u(x)}.$$

Welche DGL muss u erfüllen, damit y die Ausgangs-DGL löst?

HINWEIS: Leiten Sie obigen Ausdruck ab und setzen Sie in die DGL ein.

- c) Lösen Sie die DGL für u , und bestimmen Sie damit die Lösung des ursprünglichen AWP.

HINWEIS: Falls Sie eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ benötigen, dann probieren Sie's mit $\log x$.

Aufgabe 12

(6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 01.06.25 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Center & radii of ellipses from equation,*
- *Ellipse standard equation & graph* und
- *Vertices & direction of a hyperbola.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).

Aufgabe 13¹

(10 Zusatzpunkte)

Wir definieren eine Hyperbel als die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, genannt Brennpunkte, gleich ist. Als Brennpunkte wählen wir $(\pm f, 0)$ und als Betrag der Differenzen der Abstände $2a$ mit $0 < a < f$.

- a) Drücken Sie die in der Definition genannte Bedingung, die die Punkte (x, y) erfüllen müssen, als eine Gleichung aus (die dann die Parameter f und a enthält).
- b) Bringen Sie die Gleichung aus (a) auf die Form

$$\frac{x^2}{\dots} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Drücken Sie $b > 0$ als Funktion von f und a aus.

- c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel mit der x -Achse.
- d) Bestimmen Sie $m := \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|y|}{|x|}$ für Punkte (x, y) auf der Hyperbel.

Welche Rolle spielen die Geraden $y = \pm mx$ beim Zeichnen der Hyperbel?

- e) Zeichnen Sie die Hyperbel für $f = 5$ und $a = 4$.

¹Diese Aufgabe bezieht sich nicht auf den aktuellen Vorlesungsstoff, sondern kann mit elementaren Methoden vollkommen unabhängig von der Vorlesung bearbeitet werden. Wir werden aber im Laufe des Semesters auf diese Aufgabe zurückkommen.