

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 5 (Abgabe spätestens 22.05.2025, 10:00)

Aufgabe 18

(22 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 19

(10 Punkte)

Wir schreiben die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{*}$$

als ein DGL-System 1. Ordnung (vgl. Vorlesung). Definieren Sie dazu

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

und suchen Sie eine Matrix A , so dass $\vec{u}' = A\vec{u}$ äquivalent zu (*) wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL (*).

Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare). Schreiben Sie nun die DGL aus Aufgabe 17 als DGL-System 1. Ordnung. (Eine Inhomogenität in der Ausgangs-DGL führt auch zu einer Inhomogenität im DGL-System.) Vergleichen Sie auch hier das charakteristische Polynom der DGL mit dem charakteristischen Polynom der im DGL-System auftretenden Matrix.

Aufgabe 20

(6+2+2+3+3+2+2 = 20 Zusatzpunkte)

Bei einer chemischen Reaktion sind laut Massenwirkungsgesetz die Reaktionsraten, also die zeitlichen Änderungen der Konzentrationen der beteiligten Stoffe, proportional zum Produkt der Konzentrationen der Reaktanten (Ausgangsstoffe). Die Proportionalitätskonstanten (genannt Ratenkonstanten) legen die Reaktionsgeschwindigkeiten fest.

Wir betrachten die Umwandlung eines Substrats S in ein Produkt P unter Einfluss eines Enzyms E . Als Zwischenzustand bilde sich ein Komplex SE . Die chemischen Reaktionsgleichungen lauten



Die (positiven) Ratenkonstanten k_1, k_2, k_3 sind über bzw. unter den Pfeilen notiert. Die Rückreaktion zur zweiten Gleichung finde nicht statt.

Wir bezeichnen die Konzentrationen von S , E , SE und P mit s , e , c und p – alles Funktionen der Zeit t . Das Massenwirkungsgesetz liefert uns nun Differentialgleichungen für die Funktionen s , e , c und p , z.B. gilt

$$\dot{c}(t) = k_1 e(t) s(t) - k_2 c(t) - k_3 c(t),$$

denn wenn wir an der Reaktionsrate $\dot{c}$ des Komplexes SE interessiert sind, müssen wir alle drei Reaktionen betrachten, an denen SE beteiligt ist: SE wird in Reaktion 1 gebildet, aus E und S , daher rührt der Term $k_1 e(t) s(t)$; SE zerfällt in Reaktion 2 und in Reaktion 3, daher die Terme $-k_2 c(t)$ und $-k_3 c(t)$.

- a) Stellen Sie analog die Gleichungen für die drei anderen Reaktionsraten auf.

Wir haben nun ein (nichtlineares) Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit vier Gleichungen. Zur Zeit $t = 0$ seien positive Konzentrationen s_0 und e_0 von Substrat und Enzym vorhanden aber kein Komplex und kein Produkt – damit haben wir ein Anfangswertproblem definiert.

- b) Lösen Sie die Gleichung für p . (Ihre Lösung wird die momentan noch unbekannte Funktion c enthalten; ein Integral darf auch vorkommen.)
c) Betrachten Sie $\dot{e} + \dot{c}$ und folgern Sie daraus eine einfache Beziehung zwischen e und c . Erklären sie auch anschaulich, warum diese Beziehung gilt.
Eliminieren Sie, mittels dieser Beziehung, e aus den Gleichung für $\dot{s}$ und $\dot{c}$.

Nun bleibt uns ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit zwei Gleichungen für die Funktionen s und c , dessen Lösung wir qualitativ verstehen wollen.

- d) Begründen Sie: Bei $t = 0$ fällt s , während c steigt. Dies gilt auch weiter, solange c hinreichend klein ist.
e) Die Konzentration c steigt, bis eine bestimmte Bedingung erfüllt ist – welche? Begründen Sie, dass zu diesem Zeitpunkt s immer noch fällt.
f) Skizzieren Sie damit (soweit möglich) den zeitlichen Verlauf von s und c in einem gemeinsamen Diagramm.
g) Ergänzen Sie die Skizze um den zeitlichen Verlauf von e und p .