Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2025

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 6 (Abgabe spätestens 29.05.2025, 10:00 – Vorsicht: Feiertag!)

Aufgabe 21 (16 Punkte)
Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen ($\phi \in \mathbb{R}$) alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} , \quad C_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 22 (4 Punkte)
Geben Sie für jede der Matrizen aus Aufgabe 18 an, ob sie diagonalisierbar ist – mit minimaler(!) Begründung.

Aufgabe 23 (3 Punkte)
Führen Sie für die Matrix A aus Aufgabe 21 die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T AU$ an.

Aufgabe 24 (10 Zusatzpunkte)
Berechnen Sie e^{iBx} für die Matrix B aus Aufgabe 21, wobei $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Diagonalisieren Sie dazu die Matrix B. Wenn Sie irgendwo steckenbleiben, dann können Sie hier nachschauen: https://youtu.be/GkyDmVo_TY4.

Aufgabe 25 (6 Zusatzpunkte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$.
Ist die Determinante auch für nicht-hermitesche Matrizen gleich dem Produkt der Eigenwerte? Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Falls ja, beweisen Sie die Aussage.

Aufgabe 26 (3+3+4 = 10 Punkte)

Wir nennen

$$\vec{y}' = A\vec{y}\,, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}\,,$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von $\vec{y}$ Funktionen von x, und $\vec{y}'$ ist die komponentenweise Ableitung nach x, d.h.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

a) Rechnen Sie nach: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{u}$, so ist

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes $\vec{y}$ der Form

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{Ax}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, mit A aus Aufgabe 21.