

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 7 (Abgabe spätestens 05.06.2025, 10:00)

Aufgabe 27

(20 Punkte)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 1$

b) $2y^2 - 7x^2 + 12xy = 1$

c) $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 5$

d) $12x^2 + 36xy + 27y^2 = \frac{1}{3}$

Aufgabe 28

(8+3+5 = 16 Zusatzpunkte)

Gegeben sei die quadratische Form

$$q_A(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2ax_2x_3, \quad a \in \mathbb{R}$$

- Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a ?
- Für welchen Wert von a ist $\vec{v} = (1, 0, 1)^T$ eine Hauptachsenrichtung von q_A (d.h. ein Eigenvektor von A)?
- Bestimmen Sie für den a -Wert aus (b) die Hauptachsenform für q_A , d.h. bestimmen Sie eine Koordinatentransformation $\vec{y} = U^T \vec{x}$, U orthogonal, und eine Diagonalfom q_D mit $q_A(\vec{x}) = q_D(\vec{y})$.

Aufgabe 29

(6+4 = 10 Punkte)

Funktionen von zwei Variablen können wir auf verschiedene Arten visualisieren, z.B. durch das Zeichnen von Höhenlinien oder als perspektivische Zeichnung des Graphs der Funktion.

Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 \quad \text{und} \quad g(x, y) = y^2 - x^2.$$

- Visualisieren Sie die Funktionen mittels Höhenlinien, d.h. zeichnen Sie z.B. in einem Diagramm $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 1$ sowie $f(x, y) = 4$ und in einem anderen Diagramm $g(x, y) = 0$, $g(x, y) = 1$ und $g(x, y) = -1$. Denken Sie dabei an die Ellipsen und Hyperbeln aus der Vorlesung vom 22.05.25 oder aus den Aufgaben 7 & 13.
- Fertigen Sie nun auch perspektivische Skizzen der Graphen der beiden Funktionen an, entweder mit Stift und Papier oder mithilfe eines Computers, vgl. z.B. <https://www.wolframalpha.com/input?i=2x%5E2-x%5E4-y%5E2>.

Machen Sie sich auch den Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen klar.