Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2025
Dr. Stefan Keppeler

Mathematatik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 8 (Abgabe spätestens 19.06.2025, 10:00 – Vorsicht: Feiertag!)

Wichtiger Hinweis: Auf diesem Blatt wird noch kein ∇ benötigt und soll auch nicht verwendet werden.

Bemerkung zur Notation: Statt $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ schreiben wir auch f_x.

Aufgabe 30 (5 Zusatzpunkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Wo ist f stetig, wo nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 31 (6+6+6 = 18 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & \pi & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Seien weiter $f, q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = \mathrm{e}^{xyz} + (z - x)\sin(y)$ und $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y und f_z.
b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen q_x, q_y und q_z.
c) Berechnen Sie Richtungsableitung von q an der Stelle $\vec{x}_0 = (1\ 0\ -1)^T$ in Richtung von $\vec{v} = (1\ 1\ 1)^T/\sqrt{3}$. Verwenden Sie dabei kein ∇, sondern die Definition der Richtungsableitung.
   Hinweis: Es lohnt sich, zu überlegen, wie $\big(\partial q/\partial \vec{v}\big)(\vec{x}_0)$ für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine beliebige Richtung $\vec{v}$ an einer beliebigen Stelle $\vec{x}_0$ aussieht.

Aufgabe 32 (5 Zusatzpunkte)

Sei $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \log\big(\sqrt{x} + \sqrt{y}\big)$. Berechnen Sie f_x und f_y sowie $x\, f_x(x,y) + y\, f_y(x,y)$.

Aufgabe 33 (4+4+4 = 12 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3+y^6} & , \quad x^2+y^2>0 \\ 0 & , \quad x=y=0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion $g : y \mapsto f(x_0, y)$ für beliebiges aber festes $x_0 \in \mathbb{R}_0^+$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.

c) Ist f in $\vec{0}$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 34 (5+3+2 = 10 Zusatzpunkte)

Sei $\vec{x} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z. Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4} \right\} .$$

a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} = \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy-Ebene.

b) Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.

c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

Hinweis: Wenn Sie in (a) die Gleichung, die ein Punkt erfüllen muss, damit er sowohl in T als auch in einer Koordinatenebene liegt, etwas umstellen, kommen stets Kreise zum Vorschein.