Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2025

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 9 (Abgabe spätestens 26.06.2025, 10:00)

Aufgabe 35 (2+4 = 6 Zusatzpunkte)
Wir betrachten nochmal die Funktionen f und q aus Aufgabe 31.

a) Für welche $\vec{x}$ sind f und q total differenzierbar? Geben Sie dort ∇f und ∇q an.
b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (1, \pi, -1)^T$ in Richtung von $(1, 1, 1)^T$.

Aufgabe 36 (4+4+4+4+4 = 20 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion f ist stetig. Hinweis: $|xy| \leq x^2 + y^2$ (warum?)
b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f (für $\vec{x} \neq \vec{0}$).
c) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.
d) Ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig?
e) Ist f im Ursprung total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 37 (15 Punkte)
Wenn wir $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können wir auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $\vec{f} : M \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))^T$ definieren wir

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{(Divergenz)}$$

$$\text{und speziell für } n = 3 \quad \operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{(Rotation).}$$

Im Fall $n = 3$ schreiben wir statt x_1, x_2, x_3 auch gerne x, y, z.
Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div} \vec{f}$, $\operatorname{rot} \vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z + y \cos z \\ x + y \\ y \sin(xz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$