Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2025

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 10 (Abgabe spätestens 03.07.2025, 10:00)

Aufgabe 38 (10 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$, $j = 1, 2, 3$, für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,

b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und

c) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\binom{3}{0}$ nach $\binom{0}{3}$.

Geben Sie auch jeweils den Anfangs- und den Endpunkt des Integrationswegs an.
Ist $\vec{f}$ konservativ, d.h. gibt es ein $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{f} = \nabla F$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 39 (10 Punkte)

Bestimmen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$, $j = 1, 2$, für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^{xz} - 2x\cos(x^2 + y^2) \\ \mathrm{e}^{-y^2} - 2y\cos(x^2 + y^2) \\ x\mathrm{e}^{xz} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

$$\text{sowie} \quad \mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \log(1 + 25t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Zeichnen Sie außerdem die Kurven $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$.

Aufgabe 40 (6 Zusatzpunkte)

Wir betrachten nochmal die Funktionen f und q aus Aufgabe 31 und 35. Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen und geben Sie die Hesse-Matrizen $f''(\vec{x})$ und $q''(\vec{x})$ an.

Aufgabe 41 (3+4+3= 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x, y, z) = \dfrac{\mathrm{e}^{xy}}{1 - yz}$ um $(0, 0, 0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x, y, z) = \sin(xy) - \cos(z) + xz(y - 1)^{25}$ und $g(x, y) = \sin(x + y)$.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt $(1, 0, -1)$ von

$$f(x, y, z) = x^3 - 3x^2 + y^2 + 4yz + 2z + 3x + 25\,.$$

Hinweis: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 42 (Fortsetzung von Aufgabe 20) (12 Zusatzpunkte)

Die Lösung von Aufgabe 20c war ein DGL-System der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} = f\big(s(t), c(t)\big)$$

mit einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) Wählen Sie positive Parameter k_1, k_2, k_3 und e_0. Visualisieren Sie die Funktion f, indem Sie in der sc-Ebene an Punkten mit den Koordinaten (s, c) Pfeilchen $f(s, c)$ einzeichnen. Wählen Sie den Bereich in der sc-Ebene sinnvoll. Wählen Sie die absolute Länge der Pfeile beliebig aber sinnvoll, die relative Länge der Pfeile muss stimmen.
Hinweis: Sie dürfen zum Zeichnen auch einen Computer verwenden. Tippen Sie z.B. auf `www.wolframalpha.com` den Ausdruck `vector field plot` ein: Sie sehen dann genau so eine Visualisierung einer (anderen) Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, und es wird Ihnen ein Formular angezeigt, in dem Sie die Funktion und den Plot-Bereich eingeben können.

Lösungen des DGL-Systems entsprechen Kurven in der sc-Ebene, deren Tangentialvektoren (“Geschwindigkeitsvektoren”) an jeder Stelle durch die Pfeilchen des Plots aus Teil a gegeben sind. (Warum?)

b) Zeichnen Sie zwei oder drei Lösungen des DGL-Systems für Anfangsbedingungen der Form $\big(s(0), c(0)\big) = (s_0, 0)$, mit $s_0 > 0$, in Ihr(e) Diagramm(e) aus Teil a ein. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabe 20f.

Es gilt $f(0,0) = \binom{0}{0}$, d.h. $\big(s(t), c(t)\big) = (0,0)\ \forall t$ ist eine Lösung des DGL-Systems.[1] Für kleine s und c approximieren wir das DGL-System durch das lineare DGL-System (warum?)

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = f'(0,0) \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} .$$

c) Bestimmen Sie $f'(s, c)$.
d) Untersuchen Sie $f'(0, 0)$ auf Definitheit.
e) Wie sehen verschiedene Lösungen des linearen DGL-Systems (qualitativ) aus?
Hinweis: Denken Sie dabei v.a. an Aufgabe 26a.
f) Wo und wie manifestiert sich das Verhalten aus Teil e in dem/den Plot(s) aus Teil a?

[1] Wir nennen daher $(0, 0)$ einen Fixpunkt des DGL-Systems.