Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 11 (Abgabe spätestens 10.07.2025, 10:00)

Aufgabe 43

(8+7 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(2x - 3y)^4 - \frac{7}{4}(4x^2 + 9y^2) + 27xy \quad \text{und} \quad g(x, y) = x^2 - x^4 - \sin(y),$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$ (bzw. $\nabla g = 0$). Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 44

(5 Punkte)

Ist $y + xy^2 + \cos(xy) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sie ggf. auch $f'(0)$.

Aufgabe 45

(10 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach $\vec{y} = f(\vec{x})$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

auflösen lässt, und berechnen Sie $f'(0, -1)$.

Aufgabe 46

(10 Zusatzpunkte)

Für Umgebungen welcher Punkte (x_0, y_0) lässt sich die Gleichung

$$x^2 = y^2 + y^3$$

jeweils lokal nach y auflösen? Und wo lässt sie sich lokal nach x auflösen? Illustrieren Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll in einem Diagramm.