Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 12 (Abgabe spätestens 17.07.2025, 10:00)

Aufgabe 47

(10 Punkte)

Für welche $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?¹ Berechnen Sie auch $f^{-1}(0, 2, 0)$; geben Sie an, welchen Zweig Sie dabei gewählt haben (d.h. aus welchem Bereich bei Ihnen r , ϑ und φ stammen).

Aufgabe 48

(15 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2 + 8x - 6y}$.

- Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f .
- Bestimmen Sie alle potentiellen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 36$. Entscheiden Sie, ob es sich tatsächlich um Minima oder Maxima handelt.
- Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 36\}$. Bestimmen Sie $\max_{(x,y) \in D} f(x, y)$ und $\min_{(x,y) \in D} f(x, y)$.

HINWEIS: Denken Sie neben Satz 36 (Lagrange-Multiplikatoren) auch an Satz 27 (Min/Max stetiger Funktionen auf Kompaktum).

Aufgabe 49

(10 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie die Masse m des inhomogenen Einheitswürfels $W = [0, 1]^3$ mit Dichte

$$f(x, y, z) = x^2 z e^{xyz} + y e^{xy},$$

d.h. berechnen Sie $m = \int_W f \, dV$.

Aufgabe 50 (Zylinderkoordinaten)

(10 Punkte)

- Berechnen Sie das Volumenelement dV in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z : \text{kartesisch}),$$

- Bestimmen Sie das Volumen des Paraboloids

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 25 - z \\ 0 \leq z \leq 25 \end{array} \right\},$$

und zeichnen Sie P .

¹Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} r(x, y, z) \\ \vartheta(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) \end{pmatrix}$?

Aufgabe 51

(12 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 20.07.25 auf www.khanacademy.org die *Skills*

- *Basic set notation,*
- *Subsets of sample spaces,*
- *Simple probability,*
- *Probabilities of compound events,*
- *Independent probability* und
- *Dependent probability.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).