

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 13 (keine Abgabe)

Aufgabe 53

(keine Abgabe)

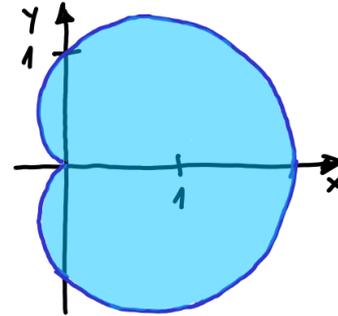
Berechnen Sie die von der Kardioide

$$\begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \cos \phi) \cos \phi \\ (1 + \cos \phi) \sin \phi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (0.1)$$

eingeschlossene Fläche.

HINWEISE: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

Integrieren Sie r von Null bis $1 + \cos \phi$. (Warum?)



Aufgabe 54

(keine Abgabe)

Bestimmen Sie das Volumen des Torus (vgl. Aufgabe 34)

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r \sin u) \cos v \\ (1 + r \sin u) \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi \right\},$$

d.h. berechnen Sie $\int_T dV$. Bestimmen Sie auch seine Oberfläche, d.h. $\int_{\partial T} dO$, wobei

$$\partial T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{2} \sin u) \cos v \\ (1 + \frac{1}{2} \sin u) \sin v \\ \frac{1}{2} \cos u \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < 2\pi \right\}.$$

Aufgabe 55

(keine Abgabe)

Sei M der Mantel eines Kegels der Höhe 5, wobei die Grundfläche ein Kreis mit Radius 2 sei.¹

- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Mantels, d.h. berechnen Sie $\int_M dO$.
- Bestimmen Sie den Fluss von $f(\vec{x}) = \vec{x}$ durch den Kegelmantel M .

Aufgabe 56

(keine Abgabe)

Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S .

HINWEIS: Ebene Polarkoordinaten, $dx dy = r dr d\varphi$, sind hilfreich.

¹Wir haben die Mantelfläche eines Kegels am 14.07.25 in der Vorlesung parametrisiert.