Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2025

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Klausur am 29.07.2025

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 97 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (5+9 = 14 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-\pi x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{4}{(x^2-1)(x-1)}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' = \dfrac{2}{y}$, $y(0) = -3$.

Aufgabe 3 (4+4+4 = 12 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' + 3y' + 2y = 0$.
b) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-3x}$.
c) Lösen Sie das AWP $y'' + 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Aufgabe 4 (7+3+3 = 13 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A\, U$.
c) Berechnen Sie A^{2025}.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$10xy - 3(x^2 + y^2) = 1$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 2y\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Sei $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$, $0 \le t < 2\pi$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f} \mathrm{d}\vec{x}$.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die Gleichung

$$z^3 + 2z = 2 - xy$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (1,2,a)$ mit geeignetem a nach $z = f(x,y)$ auflösen lässt, und berechnen Sie $(\nabla f)(1,2)$.

Aufgabe 9 (2+6+2 = 10 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_j > 0 \;\forall\; j = 1, \ldots, n$ sowie

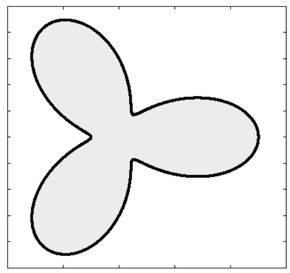
$$f(\vec{x}) = -\sum_{j=1}^{n} x_j \log x_j \qquad \text{und} \qquad g(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,.$$

Wir suchen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 1$.

a) Definieren Sie eine geeignete Lagrange-Funktion L.
b) Leiten Sie aus L die Bestimmungsgleichungen für potentielle Extremstellen ab und lösen Sie diese.
c) Was ist der Funktionswert von f an der potentiellen Extremstelle?

Aufgabe 10 (8 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt von



$$B = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le \frac{3}{2} + \cos(3\phi) \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{matrix} \right\}$$

d.h. berechnen Sie $|B| = \int_B \mathrm{d}V$.

Hinweis: Sie dürfen $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \pi$ verwenden.