

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Nachklausur am 14.10.2025

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 97 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(5+9 = 14 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^\pi x^2 \sin(x) \, dx$ b) $\int_2^\infty \frac{4}{(x^2 - 1)(x + 1)} \, dx$

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' = \frac{3}{y}$, $y(0) = -2$.

Aufgabe 3

(4+2+4 = 10 Punkte)

- a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' + 3y' + 2y = 0$.
- b) Lösen Sie das AWP $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.
- c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$.

Aufgabe 4

(9+3+3 = 15 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A .
- b) Geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.
- c) Berechnen Sie $A^{10} \vec{x}$.

ZWISCHENERGEBNIS: $\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2$.

Aufgabe 5

(10 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form in

$$5(x^2 + y^2) - 6xy = 2$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn.

Aufgabe 6

(10+4 = 14 Punkte)

Sei $f(x, y) = x^2 - y^2 - (x^4 - y^4)/2$.

- Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f , d.h. alle (x, y) mit $(\nabla f)(x, y) = 0$. Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.
- Ist $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (\pi, -\pi)$ nach y auflösbar, definiert dort also eine Funktion $y = g(x)$? Bestimmen Sie ggf. auch $g'(\pi)$.

Aufgabe 7

(9 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f} d\vec{x}$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Aufgabe 8

(2+6+2 = 10 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ sowie

$$f(\vec{x}) = -\log \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \quad \text{und} \quad g(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n x_j.$$

Wir suchen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 1$.

- Definieren Sie eine geeignete Lagrange-Funktion L .
- Leiten Sie aus L die Bestimmungsgleichungen für potentielle Extremstellen ab, und lösen Sie diese.
- Was ist der Funktionswert von f an der potentiellen Extremstelle?

Aufgabe 9

(9 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$B = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 + \cos(\phi) \\ 0 \leq \phi < 2\pi \end{matrix} \right\}$$

d.h. berechnen Sie $|B| = \int_B dV$.HINWEIS: Sie dürfen $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$ verwenden.