

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 01 (Die Area-Funktionen). Wir betrachten die hyperbolischen Funktionen $\cosh, \sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 56, Analysis-I), gegeben durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\cosh(x) > 1$ ist, für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $\cosh|_{(0, \infty)}: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ bijektiv ist. Seine Umkehrfunktion

$$\operatorname{arcosh}: (1, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad \operatorname{arcosh} := (\cosh|_{(0, \infty)})^{-1},$$

wird als *Areacossinus hyperbolicus* bezeichnet. Zeigen Sie, dass arcosh stetig differenzierbar ist, berechnen Sie seine Ableitung und skizzieren Sie seinen Graphen.

- (b) Zeigen Sie, dass $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv ist. Seine Umkehrfunktion

$$\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{arsinh} := \sinh^{-1},$$

wird mit *Areasinus hyperbolicus* bezeichnet. Zeigen Sie, dass arsinh stetig differenzierbar ist, berechnen Sie seine Ableitung und skizzieren Sie seinen Graphen.

Aufgabe 02 (Die Einheitshyperbel). Sei

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$$

der rechte Ast der *Einheitshyperbel* und $P = (a, b) \in H$ mit $b > 0$. Sei weiter $Q = (a, -b) \in H$, $o = (0, 0)$ und $F > 0$ der Flächeninhalt des Sektors, der von den Strecken \overline{oP} , \overline{oQ} und H begrenzt wird. Machen Sie eine Zeichnung für diese Situation und zeigen Sie:

$$a = \cosh(F), \quad b = \sinh(F).$$

(Hinweis: Lösen Sie die Hyperbelgleichung nach x auf, $x = \sqrt{1 + y^2}$, und benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 57, Analysis-I.) Anmerkung:

$$F = \operatorname{arcosh}(a) = \operatorname{arsinh}(b)$$

ist also der Flächeninhalt einer Fläche („Area“) und nicht wie bei den Umkehrungen der Kreisfunktionen \arccos und \arcsin die Länge eines Bogens („Arcus“).

Aufgabe 03 (Das cartesische Blatt). Das *cartesische Blatt* $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2(x + 1)\}.$$

Machen Sie eine Zeichnung von C und geben Sie *eine Parametrisierung von C* (d.i. eine parametrisierte, ebene Kurve α , so dass C die Spur von α ist) an. (Hinweis: Schneiden Sie, ähnlich wie in der Vorlesung beim Einheitskreis, C mit der Geraden durch $o = (0, 0)$ mit Steigung $t \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 04 (Das unbestimmte Integral). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\mathcal{C}^1(I)$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller stetig differenzierbaren Funktionen auf I und $V \subseteq \mathcal{C}^1(I)$ der Unterraum, bestehend aus den konstanten Funktionen auf I . Sei schließlich $\mathcal{C}^0(I)$ der \mathbb{R} -Vektorraum der stetigen Funktionen auf I .

- (a) Zeigen Sie (mit dem Homomorphiesatz der Linearen Algebra oder direkt per Hand), dass das Ableiten

$$D: \mathcal{C}^1(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I), F \mapsto F',$$

(genau) eine lineare Abbildung auf dem Quotientenvektorraum $\mathcal{C}^1(I)/V$,

$$\bar{D}: \mathcal{C}^1(I)/V \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$$

mit $\bar{D} \circ \pi = D$ induziert, wo $\pi: \mathcal{C}^1(I) \rightarrow \mathcal{C}^1(I)/V$ die kanonische Projektion bezeichnet.

- (b) Zeigen Sie, dass \bar{D} ein Isomorphismus ist. Anmerkung: Wir bezeichnen mit $\bar{D}^{-1}(f) \in \mathcal{C}^1(I)/V$ *das unbestimmte Integral von $f \in \mathcal{C}^0(I)$* , sprechen vom *Aufleiten von f* und notieren diese Äquivalenzklasse von Funktionen etwas salopp (ohne obere und untere Grenze) mit

$$\int f(x) dx.$$

Abgabe: Bis Dienstag, den 21.04.2026 um 11.15 Uhr