

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 05 (Der Tangens hyperbolicus). Wir definieren den *Tangens hyperbolicus* $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass \tanh stetig differenzierbar ist und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x).$$

Machen Sie eine Kurvendiskussion und skizzieren Sie den Graphen von \tanh .

- (b) Zeigen Sie die folgende Funktionalgleichung für \tanh . Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}.$$

Aufgabe 06 (Der Areatangens hyperbolicus).

- (a) Zeigen Sie, dass $|\tanh(x)| < 1$ ist, für alle $x \in \mathbb{R}$, und dass $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ bijektiv ist. Seine Umkehrfunktion

$$\operatorname{artanh}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{artanh} := \tanh^{-1},$$

wird mit *Areatangens hyperbolicus* bezeichnet. Zeigen Sie, dass artanh stetig differenzierbar ist, berechnen Sie seine Ableitung und skizzieren Sie seinen Graphen.

- (b) Da \cosh , \sinh und \tanh nur „Spielarten“ der Exponentialfunktion sind, verwundert es vielleicht nicht, dass sich $\operatorname{arcosh}: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\operatorname{artanh}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ durch den natürlichen Logarithmus ausdrücken lassen. Zeigen Sie, dass für alle x aus dem jeweiligen Definitionsbereich gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \\ \operatorname{arsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \\ \operatorname{artanh}(x) &= \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 07.

(a) **(Die Einheitsparabel)** Sei

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2y = 0\}$$

die *Einheitsparabel*. Geben Sie eine Parametrisierung von C an und berechnen Sie die Länge des Parabelbogens zwischen $P = (-a, \frac{1}{2}a^2)$ und $Q = (a, \frac{1}{2}a^2)$ für $a > 0$. (Hinweis: Aufgabe 57, Analysis-I)

(b) **(Die Einheitszykloide)** Die *Einheitszykloide* („Rollkurve“) $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ist die Bahn, die ein Punkt auf einem Einheitskreis beschreibt, wenn dieser auf einer Geraden abrollt. Erläutern Sie, warum man C bei geeigneter Koordinatenwahl als das Bild der Parametrisierung $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$$

beschreiben kann und machen Sie eine Skizze von C . Berechnen Sie dann die Länge der Zykloide zwischen zwei benachbarten Spitzen von C .

Aufgabe 08 (Parameterwechsel). Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossene und beschränkte Intervalle, $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare, ebene Kurve und $\varphi: I \rightarrow J$ ein *Parameterwechsel* (d.h.: φ ist stetig differenzierbar, bijektiv und $\varphi^{-1}: J \rightarrow I$ ist auch stetig differenzierbar). Zeigen Sie dass die parametrisierten Kurven α und $\beta := \alpha \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ die gleiche Länge haben,

$$L[\alpha] = L[\beta].$$

Abgabe: Bis Dienstag, den 28.04.2026 um 11.15 Uhr