Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Luca Damian

SS 2026
28.04.2026
Blatt 03

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 09 (Die Differentialgleichung für exponentielles Wachstum bzw. exponentiellen Zerfall).

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es zu jeder Lösung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der *Differentialgleichung*

$$f' = \lambda f$$

genau ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = c\exp(\lambda x)$. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto f(x)\exp(-\lambda x)$. $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Wachstums- bzw. Zerfallsrate.*)

(b) Zeigen Sie: Für $\lambda > 0$ gibt es genau ein $T > 0$, so dass für jede Lösung f gilt, dass $f(x+T) = 2f(x)$ ist, für alle $x \in \mathbb{R}$ (so genannte *Verdoppelungszeit*). Für $\lambda < 0$ gibt es genau ein $T > 0$, so dass für jede Lösung f gilt, dass $f(x+T) = \frac{1}{2}f(x)$ ist, für alle $x \in \mathbb{R}$ (so genannte *Halbwertzeit*). Berechnen Sie $T(\lambda)$ in beiden Fällen.

Aufgabe 10 (Die Schwingungsgleichung).

(a) Sei $\omega > 0$. Zeigen Sie, dass es für jede Lösung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der *Schwingungsgleichung*

$$f'' + \omega^2 f = 0$$

(eindeutige) Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x).$$

(b) Zeigen Sie, dass es ein $T > 0$ gibt, so dass für jede Lösung $f \neq 0$ der Schwingungsgleichung gilt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x+T) = f(x)$ und T mit dieser Eigenschaft minimal ist. Berechnen Sie T in Abhängigkeit von ω. ($T > 0$ heißt die *Periode von* f und $\omega > 0$ die *Frequenz* von f.)

Aufgabe 11 (Die Differentialgleichung des Tangens und seine Funktionalgleichung).

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die der Differentialgleichung

$$f' = 1 + f^2$$

genügt. Zeigen Sie, dass dann ein (eindeutiges) $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in I$ gilt: $f(x) = \tan(x+c)$. (Hinweis: Betrachte die Funktion $\arctan \circ f$.)

(b) Seien $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$, so dass auch noch $x + y \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist. Zeigen Sie, dass dann (der Nenner der rechten Seite ungleich Null ist und es) gilt:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Aufgabe 12 (Taylor-Polynome).

(a) Sei $a = 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Bestimmen Sie die Taylorpolynome $P^f_{n,0}$ für $f = \cosh$ und $f = \sinh$.

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Polynome der Ordnung 5 im Nullpunkt für die Funktionen Tangens und Arcussinus.

Abgabe: Bis Dienstag, den 05.05.2026 um 11.15 Uhr