Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Luca Damian

SS 2026
05.05.2026
Blatt 04

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 13.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich n. (Das Nullpolynom habe Grad $-\infty$.) Sei weiter $\lim_{x\to 0} p(x)/x^n = 0$. Zeigen Sie, dass $p = 0$ sein muss.

(b) Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Zeigen Sie: Ist $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich n mit

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

so muss p das Taylorpolynom von f in a der Ordnung n sein, $p = P^f_{n,a}$.

Aufgabe 14. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, dass $f'(0) = 0$ ist, f aber weder lokales Extremum noch Sattelpunkt in 0 hat.

(b) Zeigen Sie, dass f' nicht stetig ist.

Aufgabe 15 (Vorzeichenwechsel). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$. Wir sagen, dass eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ *in a einen Vorzeichenwechsel hat*, wenn gilt: Es existiert ein $\delta > 0$, so dass für f einer der beiden folgenden Fälle eintritt: (i) Für $x \in I$ mit $a-\delta < x < a$ ist $f(x) < 0$ und für $x \in I$ mit $a < x < a+\delta$ ist $f(x) > 0$, oder (ii) für $x \in I$ mit $a-\delta < x < a$ ist $f(x) > 0$ und für $x \in I$ mit $a < x < a+\delta$ ist $f(x) < 0$.

(a) Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{C}^1(I)$ mit $f(a) = 0$ und $f'(a) \neq 0$, so hat f in a einen Vorzeichenwechsel.

(b) (Wendestelle) Ist $f \in \mathcal{C}^2(I)$, so nennen wir $a \in I$ eine *Wendestelle von f*, wenn f'' in a einen Vorzeichenwechsel hat. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{C}^3(I)$ mit $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$, so ist a eine Wendestelle von f.

Aufgabe 16 (Rationale Funktionen). Sei $\mathbb{R}[X]$ der *Polynomring* aller Polynome mit reellen Keffizienten und $\sim$ folgende Relation auf $\mathbb{R}[X] \times (\mathbb{R}[X] \setminus \{0\})$: $(f, g) \sim (p, q) :\Leftrightarrow fq = gp$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. (Wir nennen eine Äquivalenzklasse $[(p, q)] =: \frac{p}{q}$ eine *rationale Funktion (mit reellen Koeffizienten)*.)

(b) Definieren Sie (nach dem Vorbild von $\mathbb{Q}$) Addition und Multiplikation auf dem *Quotientenkörper* $\mathbb{R}(X) := (\mathbb{R}[X] \times (\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}))/\sim$ und zeigen Sie, dass $\mathbb{R}(X)$ damit tatsächlich ein Körper wird.

(c) Wir definieren nun zu jedem $r \in \mathbb{R}(X)$ eine Funktion $f_r \colon I \to \mathbb{R}$ wie folgt: Wähle einen Repräsentanten (p, q) von r, so dass p und q *teilerfremd* sind, setze dann $I = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ und schließlich $f(x) := p(x)/q(x)$. Zeigen Sie, dass das wohldefiniert und die Zuordnung $r \mapsto f_r$ injektiv ist. (Hinweis: Hat ein Polynom unendlich-viele Nullstellen, so ist es bereits das Nullpoynom.)

Abgabe: Bis Dienstag, den 12.05.2026 um 11.15 Uhr