Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Luca Damian

SS 2026
12.05.2026
Blatt 05

# Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

**Aufgabe 17 (kritischer Punkt).** Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(0) = 0$ und

$$f(x) = e^{-1/x^2} \cos(\frac{1}{x})$$

für $x \neq 0$. Zeigen Sie, dass $f$ $\infty$-oft differenzierbar ist, dass $f'(0) = 0$ ist (wir nennen dann $x_0 = 0$ *einen kritischen Punkt von* $f$), $f$ aber weder lokales Extremum noch Sattelstelle in $x_0 = 0$ hat.

**Aufgabe 18 (Pol einer rationalen Funktion).** Sei $r$ eine rationale Funktion (vgl. Aufgabe 16) und $f_r\colon I \to \mathbb{R}$ die zugehörige Funktion sowie $a \in \mathbb{R} \setminus I$. Zeigen Sie, dass die *einseitigen Grenzwerte*

$$\lim_{x \to a^-} f_r(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a^+} f_r(x)$$

uneigentlich existieren und $+\infty$ oder $-\infty$ sind. (Wir nennen $a$ *einen Pol von* $f_r$.)

**Aufgabe 19 (Konvergenzradius einer Potenzreihe).** Sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ eine formale Potenzreihe. Wir nennen dann die formale Potenzreihe

$$P' := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n X^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} X^n$$

die *formale Ableitung von* $P$.

(a) Angenommen $P$ konvergiere in einer Zahl $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann $P$ und $P'$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |x_0|$ absolut konvergieren. (Hinweis: Majorisieren Sie i.W. mit den konvergenten Reihen $\sum_0^\infty \theta^n$ und $\sum_0^\infty (n+1)\theta^n$ für $\theta = |x/x_0| < 1$.)

(b) Wir definieren nun *den Konvergenzradius von* $P$ durch

$$R_P := \sup\{r \in [0, \infty) : \ P \text{ konvergiert in einem } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| = r\} \in [0, \infty].$$

Zeigen Sie: Für alle $x \in (-R_P, R_P)$ konvergiert $P$ in $x$ absolut und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R_P$ divergiert $P$ in $x$. (Das Intervall $I_P = (-R_P, R_P)$ wird als *Konvergenzbereich von* $P$ bezeichnet.)

(c) Zeigen Sie: $R_{P'} \geq R_P$. (Anmerkung: Es gilt sogar: $R_{P'} = R_P$, siehe Batt 06.)

**Aufgabe 20 (Der Abelsche Grenzwertsatz).** Sei $P$ eine formale Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$ und $f\colon (-R, R) \to \mathbb{R}$ die von $P$ induzierte Funktion, $f(x) = P(x)$. Angenommen nun, dass $P$ auch noch in $x = R$ konvergiere. Zeigen Sie mit folgender Anleitung, dass

$$\lim_{x \to R} f(x) = P(R)$$

ist.

(a) Sei $P = \sum_0^\infty a_n X^n$ und o.E. $R = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq -1$ setze $s_n := \sum_{k=n+1}^\infty a_k$ und zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist $\sum_0^\infty s_n x^n$ konvergent und es gilt:

$$P(1) - f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^\infty s_n x^n.$$

(b) Zerlegen Sie nun die Summe auf der rechten Seite geschickt in zwei Teile, um zu sehen, dass die rechte Seite für $x \to 1$ gegen Null konvergiert.

**Abgabe:** Bis Dienstag, den 19.05.2026