Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Luca Damian

SS 2026
19.05.2026
Blatt 06

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 21. Sei X eine nicht-leere Menge und $\mathcal{F}(X)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf X.

(a) Zeigen Sie, dass
$$V = \{f \in \mathcal{F}(X) : \ f \text{ ist beschränkt}\}$$
ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(X)$ ist.

(b) Wir definieren nun $\|\cdot\|: V \to [0,\infty)$ durch
$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \in [0,\infty) : \ x \in X\} \in [0,\infty).$$
Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf V ist.

(c) Man nennt einen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in ihm konvergiert. Der Raum wird in diesem Fall als ein *Banachraum* bezeichnet. Zeigen Sie nun, dass der normierte Raum der beschränkten Funktionen aus (a) ein Banachraum ist.

Aufgabe 22.

(a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\|\cdot\|: V \to [0,\infty)$ die induzierte Norm. Zeigen Sie, dass dann für $\|\cdot\|$ die so genannte *Parallelogrammgleichung* gilt: Für alle $v, w \in V$ ist:
$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

(b) Zeigen Sie, dass die *Maximumsnorm* $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ auf $\mathbb{R}^n$,
$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n}(|x_i|),$$
für $n \geq 2$ nicht von einem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ kommt.

Aufgabe 23. In einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt ein Tupel $(e_i)_{i\in I}$ von Vektoren in V *orthonormal*, wenn für alle $i, j \in I$ gilt: $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Hier bezeichnet δ_{ij} das *Kroneckersymbol*, d.h.: $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$, und $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$.

(a) Wir betrachten nun den *Folgenraum* $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ mit seiner natürlichen Vektorraumstruktur $(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$ und $\lambda \cdot (x_n) := (\lambda x_n)$ für $(x_n), (y_n) \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$l^2 := \{(x_n) \in V : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\dim l^2 = \infty$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

ein Skalarprodukt auf l^2 gegeben ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Folgen $e_n = (\delta_{mn})_{m \in \mathbb{N}}$ $(n \in \mathbb{N})$ orthonormal in l^2 sind.

Aufgabe 24. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 2π-periodischen, stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf V gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren c_0, c_n, s_n (für $n \in \mathbb{N}$) mit

$$c_0(x) = 1, \quad c_n(x) = \sqrt{2}\cos(nx), \quad s_n(x) = \sqrt{2}\sin(nx), \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

ein Orthonormalsystem von V bilden.

(c) Sei $f \in V$. Zeigen Sie: Wenn es überhaupt eine Reihe von der Form

$$a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n s_n$$

gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert, so müssen die Koeffizienten a_0, a_n, b_n (für $n \in \mathbb{N}$) die folgenden so genannten *Fourier-Koeffizienten von f* sein:

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx, \quad a_n := \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n := \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

(Die Reihe mit diesen Koeffizienten wird die *Fourier-Reihe von f* genannt.)

Abgabe: Bis Dienstag, den 02.07.2026 um 11.15 Uhr