

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 25. Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sowie $\mathcal{C}^0[a, b]$ der \mathbb{R} -Vektorraum der stetigen Funktionen auf I . Wir versehen $\mathcal{C}^0[a, b]$ mit der Supremumsnorm (vg. Aufgabe 21)

$$\|f\| := \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

- (a) Zeigen Sie, dass eine Folge von Funktionen (f_n) in $\mathcal{C}^0[a, b]$ genau dann gleichmäßig gegen ein $f \in \mathcal{C}^0[a, b]$ konvergiert, $(f_n) \xrightarrow{\text{glm}} f$, wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

- (b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C}^0[a, b], \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 21.c sowie einen bekannten Satz aus der Vorlesung.)

Aufgabe 26. Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{C}^1[a, b]$ der \mathbb{R} -Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf I . Wir versehen $\mathcal{C}^1[a, b]$ mit der Norm

$$\|f\| := \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |f'(x)|.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathcal{C}^1[a, b]$ definiert.
- (b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{C}^1[a, b], \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist. (Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 21.c und geeignete Sätze über gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen aus der Vorlesung.)

Aufgabe 27. Zeigen Sie mit Hilfe von folgender Anleitung, dass l^2 (vgl. Aufgabe 23) vollständig ist. (Einen vollständigen euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nennt man einen *Hilbertraum*.)

- (a) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in l^2 . Zeigen Sie, dass die Komponentenfolgen $(x_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) Cauchy-Folgen in \mathbb{R} sind. (Wir setzen dann: $a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^{(k)}$.)

- (b) Sei $\varepsilon > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon/2$ ist, für alle $k, l \geq k_0$. Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \geq k_0$ gibt, so dass für alle $k \geq k_n$ gilt:

$$\sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - a_j)^2 < \frac{1}{8}\varepsilon^2.$$

- (c) Benutzen Sie $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}$) und zeigen Sie durch „Einfügen einer nahrhaften Null“, dass für alle $k \geq k_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - a_j)^2 < \frac{3}{4}\varepsilon^2.$$

- (d) Sei nun $a = (a_n)$. Zeigen Sie, dass für $k \geq k_0$ gilt: $x^{(k)} - a \in l^2$, daraus $a \in l^2$ und dann, dass $(x^{(k)}) \rightarrow a$ in l^2 .

Aufgabe 28. Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ eine Norm auf \mathbb{R}^2 . Wir definieren eine Abbildung d durch

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty) : (x, y) \mapsto \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ linear abhängig sind,} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf \mathbb{R}^2 ist.

Abgabe: Bis Dienstag, den 09.06.2026 um 11.15 Uhr