Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Luca Damian

SS 2026
09.06.2026
Blatt 08

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 29. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Folge (x_n) in X genau dann gegen ein $a \in X$ konvergiert, wenn gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $d(x_n, a) < \varepsilon$.

Aufgabe 30. Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *eine Topologie auf X* (und (X,τ) dann ein *topologischer Raum*), wenn für τ folgende Axiomatik gilt: (i) $\emptyset, X \in \tau$; (ii) $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$; (iii) $U_i \in \tau$ $(i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$. (Die Elemente von τ nennt man die *offenen Teilmengen von X*.)

(a) Eine Topologie auf X heißt *Hausdorffsch*, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die von einer Metrik auf X *induzierte Topologie* Hausdorffsch ist.

(b) Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen wird genauso definiert wie in metrischen Räumen. Zeigen Sie: Der Grenzwert einer konvergenten Folge in einem Hausdorffschen topologischen Raum (einem *Hausdorff-Raum*) ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe 31. Sei V ein reeller Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 \colon V \to [0,\infty)$ heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$c_1\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq c_2\|v\|_1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ die gleiche Topologie auf V induzieren, d.h.: eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann bzgl. $\|\cdot\|_1$ offen, wenn sie es bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Folge (v_n) in V genau dann eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_1$ ist, wenn sie es bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist.

Aufgabe 32.

(a) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ genau dann konvergiert, wenn ihre Komponentenfolgen $(x_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren $(j = 1, \ldots, n)$.

(b) Zeigen Sie, dass die kanonischen Projektionen $\pi_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_j$ $(n \in \mathbb{N},\ j = 1, \ldots, n)$ stetig sind.

(c) Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) genau dann stetig ist, wenn ihre Komponentenbbildungen $f_j := \pi_j \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig sind ($j = 1, \ldots, n$).

Abgabe: Bis Dienstag, den 16.07.2026 um 11.15 Uhr