Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Luca Damian

SS 2026
16.07.2026
Blatt 09

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 33.

(a) Wählen Sie eine Norm auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass die Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$$

und die Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \cdot y$$

stetig sind.

(b) Formulieren Sie präzise und beweisen Sie dann, dass die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig ist.

Aufgabe 34. Seien X und Y metrische Räume. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq Y$ auch $f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 35. Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $U \subseteq X$ liegt *dicht in* X, falls $\overline{U} = X$ gilt, und X heißt *separabel*, falls eine abzählbare dichte Teilmenge von X existiert. Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum separabel ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie Überdeckungen der Form $\bigcup_{x \in X} B_{1/n}(x)$.)

Aufgabe 36. Sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das kanonische Orthonormalsystem in l^2 (vgl. Aufgabe 23).

(a) Berechnen Sie $\|e_n - e_m\|$, für alle $m, n \in \mathbb{N}$, und begründen Sie, dass (e_n) keinen Häufungspunkt hat.

(b) Zeigen Sie, dass die *Einheitskugel* $\mathbb{B} \subseteq l^2$, d.h.: $\mathbb{B} = \{x \in l^2 : \|x\| \leq 1\}$, zwar abgeschlossen und beschränkt in l^2 ist, nicht aber kompakt.

Abgabe: Bis Dienstag, den 23.06.2026 um 11.15 Uhr