

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 37.

- (a) Berechnen Sie die Gradienten von $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = y \cdot \sqrt{2x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = x \cdot \exp(x^2 - y^2).$$

- (b) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass für alle zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\Delta(f \cdot g) = \Delta(f) \cdot g + 2\langle \text{grad}(f), \text{grad}(g) \rangle + f \cdot \Delta(g).$$

Aufgabe 38. Zeigen Sie, dass folgende Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz \mathbb{R}^2 partiell differenzierbar aber in $(0,0)$ unstetig ist:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal partiell differenzierbare Funktion. Die Funktion f heißt *harmonisch*, falls $\Delta f = 0$ gilt.

Aufgabe 39. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die euklidische Norm. Zeigen Sie, dass für $n \neq 2$ die Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \|x\|^{2-n}$$

bzw. im Fall $n = 2$ die Funktion

$$g: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \ln(\|x\|)$$

harmonisch ist.

Aufgabe 40. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto g(t, x)$ eine bezüglich der x -Variablen zweimal partiell differenzierbare Funktion. Man definiert den Laplace von g bezüglich der x -Variablen durch

$$\Delta g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: (t, x) \mapsto \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(t, x).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto t^{-n/2} \cdot \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$$

die so genannte *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

erfüllt.

Abgabe: Bis Dienstag, den 30.06.2026 um 11.15 Uhr