Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Luca Damian

SS 2026
30.06.2026
Blatt 11

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 41. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Zeigen Sie:

(a) Für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f: G \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0,$$

(b) und für jedes zweimal stetig differenzierbare Vektorfeld $v: G \to \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(v)) = 0.$$

Aufgabe 42. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare, rotationssymmetrische Funktion, also $f = u \circ r$ mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $u: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, wo $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die Radiusfunktion, $r(x) = \|x\|$, ist. Zeigen Sie, dass auch $\Delta(f): \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dann rotationssymmetrisch ist, also $\Delta(f) = v \circ r$ mit einer stetigen Funktion $v: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist, und es gilt (für alle $t \in \mathbb{R}^+$):

$$v(t) = \ddot{u}(t) + \frac{n-1}{t}\dot{u}(t).$$

Aufgabe 43. Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(0,0) = 0$ und für $(x,y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist und es gilt

$$D_1 D_2 f(0,0) \neq D_2 D_1 f(0,0).$$

Könnnen da $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$ beide stetig in $(0,0)$ sein?

Definition. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gebiet, $x_0 \in G$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $f: G \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Es heißt dann f *in* x_0 *in Richtung* v *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$D_v f(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + tv) - f(x_0))$$

existiert und es wird dann $D_v f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ *die Richtungsableitung von* f *im Punkt* x_0 *in Richtung* v genannt.

Aufgabe 44.

(a) Sei nun $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ ($G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $m, n \in \mathbb{N}$) in $x_0 \in G$ total differenzierbar. Zeigen Sie, dass f dann in x_0 in alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und es gilt:

$$D_v f(x_0) = Df(x_0)v.$$

(b) Betrachten wir nun die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = 1$, falls $x > 0$ und $y = x^2$ ist, sowie $f(x,y) = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ in jede Richtung differenzierbar, aber f nicht stetig in $(0,0)$ ist. Kann f da total differenzierbar in $(0,0)$ sein?

Abgabe: Bis Dienstag, den 07.07.2026 um 11.15 Uhr