Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Luca Damian

SS 2026
07.07.2026
Blatt 12

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Definition. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte (reelle) Vektorräume. Ein *Operator* $T\colon V \to W$ (d.h.: eine lineare Abbildung) heißt *beschränkt*, falls gilt:

$$\|T\| := \sup\{\|Tv\|_W \in [0,\infty) : \ \|v\|_V \leq 1\} < \infty.$$

Aufgabe 45. Seien V und W normierte Vektoräume und $T\colon V \to W$ ein Operator. Zeigen Sie,

(a) dass T genau dann stetig (überall) ist, wenn T stetig in 0 ist;

(b) dass T stetig ist, genau wenn T beschränkt ist;

(c) dass für $\dim V < \infty$ jeder Operator T stetig ist.

Aufgabe 46. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und

$$L(V,W) := \{T \in \mathrm{Hom}(V,W) : T \text{ ist beschränkt}\}$$

(siehe Aufgabe 45). Zeigen Sie:

(a) $L(V,W)$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}(V,W)$.

(b) *Die Operatornorm* (siehe Aufgabe 45) $\|\cdot\|\colon L(V,W) \to \mathbb{R}$ ist eine Norm auf $L(V,W)$.

Aufgabe 47.

(a) *Ebene Polarkoordinaten* sind wie folgt gegeben: Sei $G = \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f\colon G \to \mathbb{R}^2$,

$$f(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(r,\varphi) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, für alle $(r,\varphi) \in G$, und zeigen Sie, dass f injektiv ist. Was ist das Bild von f?

(b) *Räumliche Polarkoordinaten* kann man so definieren: Sei $G = \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $g\colon G \to \mathbb{R}^3$,

$$g(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta).$$

Bestimmen Sie für jedes $(r,\vartheta,\varphi) \in G$ die Jacobi-Matrix $J_g(r,\vartheta,\varphi) \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ und zeigen Sie, dass g injektiv ist. Was ist das Bild von f?

Aufgabe 48. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $x_0 \in G$ und $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ (total) differenzierbar in x_0. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine differenzierbare Kurve $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ ($\varepsilon > 0$ geeignet), so dass gilt: $\alpha(0) = x_0$ und $\dot{\alpha}(0) = v$.

(b) Ist $v \in \mathbb{R}^n$ und α wie unter (a), so gilt:

$$Df(x_0)v = (f \circ \alpha)^{\cdot}(0).$$

Abgabe: Bis Dienstag, den 14.07.2026 um 11.15 Uhr