

Übungen zu „Analysis II und Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 49. Sei $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Ordnung 2 in $(1, 1)$.

Aufgabe 50. Wir betrachten die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2) \exp(x^2 + 4y^2).$$

- (a) Berechnen Sie $\text{grad}(f)(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, und zeigen Sie, dass f höchstens in $(0, 0)$ ein lokales Minimum haben kann.
- (b) Berechnen Sie nun $\text{Hess}(f)(0, 0)$ und zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ ein striktes lokales Minimum hat.
- (c) Schauen Sie noch einmal die Funktionsvorschrift von f an und zeigen Sie dann, dass f in $(0, 0)$ sogar ein *striktes globales Minimum* hat.

Aufgabe 51. Wir identifizieren $\text{Mat}_n \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ ($n \in \mathbb{N}$).

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\text{GL}_n \mathbb{R} = \{A \in \text{Mat}_n \mathbb{R} : A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq \text{Mat}_n \mathbb{R}$$

offen ist und die Abbildung $F: \text{GL}_n \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_n \mathbb{R}$, $A \mapsto A^{-1}$, stetig differenzierbar. (Hinweis: $\det: \text{Mat}_n \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Drücken Sie A^{-1} mit Hilfe der Adjunkten von A aus.)

- (b) Zeigen Sie, dass für das Differential $DF_A: \text{Mat}_n \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_n \mathbb{R}$ von F in jedem $A \in \text{GL}_n \mathbb{R}$ gilt:

$$DF_A(B) = -A^{-1}BA^{-1}.$$

(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 48, um $DF_A(B)$ zu berechnen und $F(C)C = \mathbf{1}_n$, für alle $C \in \text{GL}_n \mathbb{R}$.)

Aufgabe 52. Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $c > 0$. Zeigen Sie, dass $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

(„einlaufende und auslaufende Welle“) zweimal stetig differenzierbar ist und der folgenden *Wellengleichung* genügt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Abgabe: Bis Dienstag, den 21.07.2026 um 11.15 Uhr