

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Aufgabe	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	Summe
Punkte													

Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und beschriften dieses mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben und 12 Teilaufgaben. In jeder Teilaufgabe können Sie bis zu 4 Punkten bekommen. Die Höchstpunktzahl ist also 48, so dass Sie mit 24 Punkten den Test/die Klausur bestanden haben. Bei der Klausur gibt es auch eine Note, die beim Test informationshalber auch angegeben ist. **Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.** Viel Erfolg!

Test/Klausur zu „Analysis II/Mathematik für Physiker III“

Aufgabe 01. Sei $D := \mathbb{R} \setminus \{n\pi \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\}$. Wir definieren den *Cotangens* $\cot: D \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(a) Begründen Sie, warum $\cot$ differenzierbar ist und zeigen Sie:

$$\cot' = -1 - \cot^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\cot|_{(0, \pi)}: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv ist und begründen Sie, warum

$$\operatorname{arccot} := (\cot|_{(0, \pi)})^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von arccot .

Aufgabe 02. Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$, gegeben durch

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.
- (b) Begründen Sie, warum f stetig und 2π -periodisch ist.

Aufgabe 03. Wir betrachten die so genannte *Neillsche Parabel*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\}.$$

- (a) Machen Sie eine (grobe) Zeichnung von C und begründen Sie, warum $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung von C ist.
- (b) Geben Sie einen (möglichst einfachen) analytischen Ausdruck für die Länge der Kurve C zwischen $o = (0, 0)$ und $p = (1, 1)$ an.

Aufgabe 04.

- (a) Begründen Sie, warum die *Einheitskreislinie*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

kompakt ist.

- (b) Geben Sie eine offene Überdeckung von $D = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ an, die keine endliche Teilüberdeckung hat und begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 05. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein Gebiet.

- (a) Seien $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ und $X: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\operatorname{div}(fX) = \langle \operatorname{grad}(f), X \rangle + f \operatorname{div}(X).$$

- (b) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator $\Delta: \mathcal{C}^2(G) \rightarrow \mathcal{C}^0(G)$ linear ist, also für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{C}^2(G)$ gilt:

$$\Delta(af + bg) = a\Delta(f) + b\Delta(g).$$

Aufgabe 06. Wir betrachten die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x^4 - 2xy + y^2.$$

- (a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f .
- (b) Berechnen Sie die Hesse-Matrizen von f in den kritischen Stellen und untersuchen Sie diese auf Definitheit.