

INTEGRALSÄTZE ÜBUNGSBLATT 10

Aufgabe 10: Verallgemeinertes Kreuzprodukt

Für $n - 1$ Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ sei das verallgemeinerte Kreuzprodukt $\underline{K} : (\mathbb{R}^n)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\underline{K}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n-1,1} & \underline{e}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1,n} & \underline{e}_n \end{vmatrix}, \text{ wobei } \underline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix}$$

und \underline{e}_j der j -te kanonische Einheitsvektor ist. (Das ist so zu verstehen: $\det(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_{n-1}, \underline{b})$ ist eine lineare Funktion von \underline{b} , sagen wir $=: \sum_{k=1}^n \alpha_k b_k$; setze $\underline{K} := \sum_{k=1}^n \alpha_k \underline{e}_k$.) Zeigen Sie:

- Für alle $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\underline{K}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}) \cdot \underline{b} = \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{b})$.
- $\underline{K}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}) \perp \underline{a}_j$ für alle $j = 1, \dots, n - 1$.
- $\|\underline{K}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1})\| = \text{Vol}_{n-1} P_{n-1}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1})$, wobei Vol_{n-1} das $(n - 1)$ -dimensionale Volumen bedeutet und

$$P_{n-1}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \underline{a}_j : \beta_j \in [0, 1] \forall j \right\}$$

das von $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}$ aufgespannte Parallelotop. Geben Sie dafür ein geometrisches Argument. (*Tipp:* $\text{Vol}_n(P_n(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)) = |\det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)|$, und eine geschickte Wahl von \underline{a}_n hilft.)

Abgabe: Bis Mittwoch 8.7.2026 um 23:59 Uhr.