

INTEGRALSÄTZE: ÜBUNGSBLATT 5

Aufgabe 5: Konservative Vektorfelder

Sei \underline{A} wie in Aufgabe 2 auf Blatt 2 das Vektorfeld

$$\underline{A}(x_1, x_2) = \frac{c}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ mit $c \neq 0$. Aus Aufgabe 2 folgt, dass \underline{A} nicht konservativ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial A_1 / \partial x_2 = \partial A_2 / \partial x_1$.

(b) Wie kann das sein? Wieso folgt aus (a) nicht mit dem Integrabilitätskriterium, dass \underline{A} konservativ ist?

(c) Seien (r, φ) Polarkoordinaten, $(x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Hierbei hat man die Freiheit, für φ irgendein Intervall $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ der Länge 2π wählen; dann ist φ als Funktion von (x_1, x_2) auf der geschlitzten Ebene $E_\alpha := \mathbb{R}^2 \setminus \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha) : r \geq 0\}$ stetig differenzierbar. Erklären Sie geometrisch, warum auf E_α gilt $\underline{A} = c \nabla \varphi$. Also ist \underline{A} lokal ein Gradient.

Abgabe: bis Mittwoch 20.5.2026 um 23:59 Uhr.