Der Integralsatz von Stokes für Differentialformen

Roderich Tumulka

Sommersemester 2026

3.1 Vorbetrachtungen

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim V =: d < \infty$.

Definition
Der *Dualraum* V' ist die Menge der linearen Abbildungen $V \to \mathbb{R}$. Seine Elemente heißen Linearformen oder Kovektoren. Ein Kovektorfeld auf $U \subseteq V$ ist eine Funktion $f : U \to V'$.

Bemerkung
Ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ auf V definiert einen Isomorphismus $V \to V'$, $v \mapsto \langle v, - \rangle$, so dass jeder Vektor in einen Kovektor übersetzt werden kann und umgekehrt. Ist ein Skalarprodukt gegeben, ist es daher nicht erforderlich, zwischen Vektoren und Kovektoren zu unterscheiden.

Beispiele
In Anwendungen ist nicht jeder Vektorraum mit einem Skalarprodukt ausgestattet.

(a) In der Thermodynamik betrachtet man Größen wie Entropie S, Temperatur T, Druck p etc. als Funktionen auf dem “Zustandsraum” Ω (Menge der thermischen Gleichgewichtszustände), der eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Z.B. kann Ω aus den Tripeln (E, V, N) bestehen mit $E > 0$ (Energie), $V > 0$ (Volumen), $N > 0$ (Teilchenzahl; eigentlich ganzzahlig, aber approximativ als kontinuierlich behandelt). Abstände oder Winkel in den Koordinaten E, V, N haben in der Regel keine direkte physikalische Bedeutung.

(b) In der Mechanik kann der Phasenraum eines n-Teilchen-Systems durch die Orte und Impulse (oder Geschwindigkeiten) der Teilchen (also $\mathbb{R}^{6n}$) parametrisiert werden. Da Orte und Impulse unterschiedliche Maßeinheiten haben, kann man ihre Quadrate schlecht addieren.

(c) Ein Punkt der Raumzeit $\mathscr{M}$ ist durch $(t, \underline{x})$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. In der nichtrelativistischen Physik gibt es kein Skalarprodukt auf $\mathscr{M}$, in der relativistischen ist das Minkowski-Produkt $x^\mu \tilde{x}_\mu = c^2 t\tilde{t} - \underline{x} \cdot \underline{\tilde{x}}$ zwar bilinear, aber nicht positiv definit. (Zwar definiert diese Bilinearform immer noch einen Isomorphismus $\mathscr{M} \to \mathscr{M}'$, aber die Koeffizienten eines Kovektors (nach der dualen Basis) sind dann nicht mehr dieselben wie die des Vektors.)

3.2 Tensoren

Definition
Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet man die Menge der multilinearen Abbildungen

$$T : V_1 \times \cdots \times V_k \to \mathbb{R} \tag{1}$$

als das *Tensorprodukt* $V_1' \otimes \cdots \otimes V_k'$ der Vektorräume $V_1', \ldots, V_k'$. (Dies ist ein Vektorraum. Man kann auch $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ bilden, indem man V_i durch V_i' ersetzt, aber das werden wir hier nicht benutzen. Überdies betrachten wir im Folgenden nur $V_1 = \ldots = V_k = V$.) Man nennt $V'^{\otimes k} := V' \otimes \cdots \otimes V'$ mit k Faktoren die k-te *Tensorpotenz* von V' und ihre Elemente die *Tensoren der Stufe k* über V. Ein Tensor der Stufe 0 sei ein Skalar, $V'^{\otimes 0} := \mathbb{R}$.

Bemerkung
Gegeben eine Basis $v_1, \ldots, v_d$ von V, so lässt sich $T \in V'^{\otimes k}$ ausdrücken als

$$T(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{d} C_{i_1 \ldots i_k} \, u_{1,i_1} \cdots u_{k,i_k} \qquad \forall u_1, \ldots, u_k \in V \tag{2}$$

mit d^k (eindeutig durch T festgelegten) Koeffizienten $C_{i_1 \ldots i_k}$ und $u_j = \sum_{i=1}^d u_{ji} v_i$; umgekehrt gibt es zu jeder Wahl der Koeffizienten einen Tensor T, so dass (2) gilt.

Beispiele

(a) Ein Skalarprodukt auf V ist ein Tensor der Stufe 2. Für jeden Tensor der Stufe 2 bilden die Koeffizienten eine Matrix (C_{ij}). Die eines Skalarprodukts hat Einträge $C_{ij} = \delta_{ij}$, falls die Basis eine Orthonormalbasis ist.

(b) Die k-te Ableitung eines Skalarfelds $f : V \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in V$ ist ein Tensor k-ter Stufe mit Koeffizienten $C_{i_1 \ldots i_k} = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(p)$. Die k-te Ableitung von f ist daher ein *Tensorfeld* $D^k f : V \to V'^{\otimes k}$.

(c) Der Riemannsche Krümmungstensor in der Allgemeinen Relativitätstheorie (und der Theorie gekrümmter Flächen) ist ein Tensorfeld der Stufe 4.

Definition
Ein Tensor $T \in V'^{\otimes k}$ heißt *symmetrisch*, wenn

$$T(u_1, \ldots, u_k) = T(u_{\pi(1)}, \ldots, u_{\pi(k)}) \tag{3}$$

für alle $u_1, \ldots, u_k \in V$ und alle Permutationen $\pi \in S_k$, und *anti-symmetrisch*, wenn stets

$$T(u_1, \ldots, u_k) = \operatorname{sgn}(\pi)\, T(u_{\pi(1)}, \ldots, u_{\pi(k)})\,. \tag{4}$$

Bemerkung
T ist genau dann anti-symmetrisch, wenn

$$C_{i_1 \ldots i_k} = \operatorname{sgn}(\pi)\, C_{i_{\pi(1)} \ldots i_{\pi(k)}} \tag{5}$$

und genau dann symmetrisch, wenn (5) ohne $\operatorname{sgn}(\pi)$ gilt. Die (anti-)symmetrischen Tensoren der Stufe k bilden einen Unterraum von $V'^{\otimes k}$, und der durch

$$(\operatorname{Sym} T)(u_1, \ldots, u_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} T(u_{\pi(1)}, \ldots, u_{\pi(k)}) \tag{6}$$

$$(\operatorname{Anti} T)(u_1, \ldots, u_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \operatorname{sgn}(\pi)\, T(u_{\pi(1)}, \ldots, u_{\pi(k)}) \tag{7}$$

definierte Operator Sym (bzw. Anti) : $V'^{\otimes k} \to V'^{\otimes k}$ ist gerade die Projektion auf diesen Unterraum. Der Unterraum der anti-symmetrischen Tensoren der Stufe k wird auch mit $\Lambda^k(V)$ bezeichnet und hat Dimension $d!/k!(d-k)!$. Für $k = 2$ ist jeder Tensor Summe eines symmetrischen und eines anti-symmetrischen (entsprechend der Zerlegung einer Matrix in eine symmetrisch und eine anti-symmetrische); das trifft für $k > 2$ nicht mehr zu. Für $k = 1$ ist jeder Tensor symmetrisch und jeder Tensor anti-symmetrisch; für $k > 1$ ist nur der Nulltensor zugleich symmetrisch und anti-symmetrisch, weil $T(u_1, u_2, \ldots) = T(u_2, u_1, \ldots) = -T(u_1, u_2, \ldots)$.

Beispiele

(a) Das Skalarprodukt ist ein symmetrischer Tensor.

(b) Die Ableitung $D^k f(x)$ ist symmetrisch, falls $f \in C^k$.

(c) Die Determinante ist ein anti-symmetrischer Tensor der Stufe d über $V = \mathbb{R}^d$. Allgemeiner ist in einem V ($\dim V = d$) mit Skalarprodukt das Volumen des von $u_1, \ldots, u_d$ aufgespannten Parallelotops

$$P_d(u_1, \ldots, u_d) := \left\{ \sum_{i=1}^{d} \alpha_i u_i : \alpha_i \in [0,1] \forall i \in \{1 \ldots d\} \right\} \tag{8}$$

gerade

$$\mathrm{Vol}_d\big(P_d(u_1,\dots,u_d)\big) = \big|T(u_1,\dots,u_d)\big|\,, \tag{9}$$

wobei T der anti-symmetrische Tensor der Stufe d über V ist, der definiert ist durch

$$T(u_1,\dots,u_d) = \det\big(\varphi(u_1),\dots,\varphi(u_d)\big)\,, \tag{10}$$

wobei $\varphi : V \to \mathbb{R}^d$ die Koeffizienten eines Vektors bezüglich der Orthonormalbasis $v_1,\dots,v_d$ liefert. Eine andere Wahl von $v_1,\dots,v_d$ ändert T höchstens um ein Vorzeichen (nämlich wenn die beiden Basen entgegengesetzte Orientierung haben). In einem V *ohne* Skalarprodukt lässt sich ein Volumenbegriff definieren, indem man einen anti-symmetrischen Tensor T der Stufe d einführt und (9) als Definition nimmt; T heißt dann eine *Volumenform*; das wird z.B. im Phasenraum in der Mechanik so gemacht.

(d) Sei nochmal V ein Skalarproduktraum. Wir interessieren uns jetzt für das k-dimensionale Volumen ($k \leq d$) des von $u_1,\dots,u_k$ aufgespannten Parallelotops. Indem wir Beispiel (c) auf $U := \mathrm{Spann}\{u_1,\dots,u_k\}$ anwenden, erhalten wir

$$\mathrm{Vol}_k\big(P_k(u_1,\dots,u_k)\big) = \big|T_U(u_1,\dots,u_k)\big| \tag{11}$$

für einen bestimmten anti-symmetrischen Tensor T_U der Stufe k über U. Dieser lässt sich fortsetzen zu einem anti-symmetrischen Tensor $\tilde{T}_U$ der Stufe k über V, nämlich

$$\tilde{T}_U(v_1,\dots,v_k) = T_U(P_U v_1,\dots,P_U v_k)\,, \tag{12}$$

wobei P_U die orthogonale Projektion auf U ist.

3.3 Differentialformen und der Satz von Stokes

Integrale von Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$ über k-dimensionale Flächen ("k-Flächen") in einem Vektorraum V der Dimension d müssen

$$f(\phi(u))\,\mathrm{Vol}_k(P(\partial_1\phi\, du_1,\dots,\partial_k\phi\, du_k)) = f(\phi(u))\,T(\partial_1\phi\, du_1,\dots,\partial_k\phi\, du_k)$$

integrieren (falls die Parametrisierung ϕ die richtige Orientierung liefert), wobei $T = \tilde{T}_U$ wie in (12) ist, du_i eine infinitesimale Zahl, $\partial_i\phi\, du_i$ ein infinitesimaler Vektor und $P(\partial_1\phi\, du_1, ...)$ das von ihnen aufgespannte Parallelotop. Es bietet sich an, die Faktoren f und T zu einem Tensorfeld ω zusammenzufassen.

Definition
Ein anti-symmetrisches Tensorfeld ω der Stufe k heißt auch eine *Differentialform vom Grad k* oder eine *k-Form.* Das Integral von ω über eine orientierte, C^1 k-Fläche $\mathcal{F}$ ist definiert durch

$$\int_{\mathcal{F}} \omega = \int_D d\underline{u}\;\, \omega\big(\partial_1\phi(\underline{u}),\dots,\partial_k\phi(\underline{u})\big)\,, \tag{13}$$

wenn ϕ eine Parametrisierung von $\mathcal{F}$ mit Parameterbereich $D \subset \mathbb{R}^k$ ist.

Die anti-symmetrischen Tensoren wurden besonders von Hermann Grassmann (1844) studiert, die Differentialformen von Élie Cartan (1899) eingeführt.

Satz
$\int_{\mathcal{F}} \omega$ hängt nicht von der Parametrisierung ab.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass für jedes $T \in \Lambda^k \mathbb{R}^d$, jede $d \times k$-Matrix A und jede $k \times k$-Matrix B gilt:

$$T(AB) = T(A)\ \det(B)\,, \tag{14}$$

wobei $T(A)$ bedeutet, dass man die Spalten von A in T einsetzt. Denn: Sind $a_1, \dots, a_k$ die Spalten von A und $B = (b_{ij})$, dann ist die j-te Spalte von AB gerade $\sum_{i=1}^k a_i b_{ij}$, also

$$T(AB) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{k} b_{i_1 1} \cdots b_{i_k k} T(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})\,. \tag{15}$$

Nur die Summanden sind $\neq 0$, bei denen $i_1, \dots, i_k$ paarweise verschieden, also eine Permutation π von $1, \dots, k$ sind, und die lauten

$$T(AB) = \sum_{\pi \in S_k} b_{\pi(1)1} \cdots b_{\pi(k)k}\, \mathrm{sgn}(\pi)\, T(a_1, \dots, a_k)\,. \tag{16}$$

Nun liefert die Leibniz-Formel für die Determinante gerade (14).

Jetzt zur Umparametrisierung des Integrals. Sei $\psi = \phi \circ \varphi$ mit einer Umparametrisierung $\varphi : D' \to D$, die die Orientierung nicht ändert. Dann ist überall $\det D\varphi > 0$ und $D\psi = D\phi \circ D\varphi$, und daher

$$\omega(D\psi) = \omega(D\phi)\ \det(D\varphi)\,. \tag{17}$$

Also liefert der Transformationssatz (TS) für Integrale:

$$\int_\psi \omega = \int_{D'} d\underline{s}\ \omega(D\psi(\underline{s})) = \int_{D'} d\underline{s}\ \omega(D\phi)\Big|_{\varphi(\underline{s})} \det(D\varphi(\underline{s})) \tag{18}$$

$$\overset{\text{TS}}{=} \int_D d\underline{u}\ \omega(D\phi(\underline{u})) = \int_\phi \omega\,, \tag{19}$$

wie behauptet. $\square$

Beispiel
Normalerweise muss man für die Integration eines Integranden f wissen, was man mit dem Volumen dx meint; das ist beim Integrieren einer Differentialform ω anders, weil hier der nötige Volumenbegriff bereits in ω mit eingebaut ist. Differentialformen kann man immer dann gut gebrauchen, wenn man kein Skalarprodukt zur Verfügung hat.

Zum Beispiel kann man im Zustandsraum Ω der Thermodynamik 1-Formen (aber keine Vektorfelder) entlang von Kurven integrieren. Tatsächlich lassen sich Tensorfelder einschließlich Differentialformen und ihrer Integrale nicht nur auf Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, sondern auch auf *Mannigfaltigkeiten* (grob gesagt, gekrümmten Räumen) definieren.

Definition
Das *Tensorprodukt* $\otimes : V'^{\otimes k} \times V'^{\otimes \ell} \to V'^{\otimes (k+\ell)}$ ist definiert durch

$$(S \otimes T)(u_1, \ldots, u_{k+\ell}) = S(u_1, \ldots, u_k)\, T(u_{k+1}, \ldots, u_{k+\ell}) \tag{20}$$

oder, äquivalent dazu,

$$C^{S\otimes T}_{i_1,\ldots,i_{k+\ell}} = C^S_{i_1,\ldots,i_k}\, C^T_{i_{k+1},\ldots,i_{k+\ell}}\,. \tag{21}$$

Das *Keilprodukt* $\wedge : \Lambda^k(V) \times \Lambda^\ell(V) \to \Lambda^{k+\ell}(V)$ (auch *äußeres Produkt* genannt) ist definiert durch

$$S \wedge T = \tfrac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \operatorname{Anti}(S \otimes T)\,. \tag{22}$$

Die *äußere Ableitung* dT der k-Form T ist

$$dT := \nabla \wedge T := (k+1) \operatorname{Anti}(\nabla T)\,, \tag{23}$$

das heißt in Koeffizienten

$$C^{dT}_{i_1,\ldots,i_{k+1}}(\underline{x}) = (k+1) \operatorname{Anti}\big(\partial_{i_1} C^T_{i_2,\ldots,i_{k+1}}(\underline{x})\big) \qquad \forall \underline{x} \in V\,. \tag{24}$$

Beispiele

(a) Für ein Skalarfeld $f : V \to \mathbb{R}$ ist df gerade das Gradientenfeld von f (aufgefasst als eine 1-Form, also als ein Kovektorfeld), $df = Df = \nabla f$.

(b) dx_i für eine Koordinatenfunktion in $\mathbb{R}^d$ ist das konstante Kovektorfeld $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ mit der 1 an der i-ten Stelle; $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d$ ist nichts anderes als die Determinante.

(c) Sei $\omega = f(\underline{x})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d$. Dann ist $\int_U \omega$ das normale Volumenintegral von f in $\mathbb{R}^d$ über die offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ (bzw. im orientierten Skalarproduktraum V bezüglich einer positiv orientierten Orthonormalbasis).

(d) In der Relativitätstheorie ist das elektromagnetische Feld ($\mu, \nu \in \{0,1,2,3\}$)

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

eine 2-Form F auf der Raumzeit $\mathscr{M} = \mathbb{R}^4$. Es gelten

$$dF = 0 \text{ und } F = dA\,, \tag{26}$$

wobei die 1-Form $A = \Phi\, dx^0 + \sum_{i=1}^{3} A_i\, dx^i$ das 4-dimensionale *Vektorpotential* heißt.

(e) In der Thermodynamik mit

$$\Omega = \{(E, V, N) \in \mathbb{R}^3 : E > 0, V > 0, N > 0\} \tag{27}$$

bilden dE, dV, dN eine Basis des Dualraumes, daher lässt sich jedes Kovektorfeld (jede 1-Form) f schreiben als

$$f = c_1 \, dE + c_2 \, dV + c_3 \, dN \, . \tag{28}$$

Nicht jedes Kovektorfeld f ist ein Gradient (ein "exaktes Differential"). Tatsächlich ist $f : V \to V'$ genau dann ein Gradient, wenn $df = 0$. (Denn die Koeffizienten von df sind gerade $\partial_i f_j - \partial_j f_i$, und $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ war gerade unser Integrabilitätskriterium aus Kapitel 1; $G = V$ ist natürlich ein sternförmiges Gebiet in V, und Ω eines in $\mathbb{R}^3$.)

Bemerkung
Das Keilprodukt ist assoziativ und distributiv, aber nicht kommutativ; sondern, es gilt

$$T \wedge S = (-1)^{k\ell} \, S \wedge T \, . \tag{29}$$

Bemerkung
Für jede C^2-Differentialform T gilt $ddT = 0$.

Beweis: Wir halten zunächst fest, dass für beliebige Koeffizienten $C_{i_1 \ldots i_k, i_{k+1} \ldots, i_{k+\ell}}$ gilt: anti-symmetrisiert man in den Indices $i_1, \ldots, i_k$ und danach in allen Indices, so erhält man dasselbe Ergebnis wie wenn man nur einmal in allen Indices anti-symmetrisiert hätte,

$$\mathrm{Anti}_{k+\ell} \circ \mathrm{Anti}_k = \mathrm{Anti}_{k+\ell} \, . \tag{30}$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} C^{ddT}_{i_1 \ldots i_{k+2}} &= (k+2)(k+1) \mathrm{Anti}_{k+2}(\partial_{i_1} \mathrm{Anti}_{k+1}(\partial_{i_2} C^T_{i_3 \ldots i_{k+2}})) && (31) \\ &= (k+2)(k+1) \mathrm{Anti}_{k+2}(\partial_{i_1} \partial_{i_2} C^T_{i_3 \ldots i_{k+2}}) && (32) \\ &= 0 && (33) \end{aligned}$$

aufgrund des Satzes von Schwarz über die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen. □

Satz von Stokes für Differentialformen (ohne Beweis)
Sei $0 \leq k \leq d-1$, $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ eine orientierte kompakte $k+1$-dimensionale C^1-Fläche mit stückweise C^1-Rand $\partial\mathcal{F}$ (positiv orientiert) und ω eine k-Form, die C^1 ist auf einer Umgebung von $\mathcal{F}$. Dann ist

$$\int_{\mathcal{F}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{F}} \omega \, . \tag{34}$$

Beispiele

- $d = 1$, $k = 0$: ω ist ein Skalarfeld $f(x)$, $d\omega$ die Ableitung $f'(x)$, und der Satz von Stokes gerade der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

- $d = 2$, $k = 0$: ω ist ein Skalarfeld $f(\underline{x})$, $d\omega$ der Gradient $\nabla f(\underline{x})$, und (34) besagt

$$\int_\gamma \nabla f \cdot d\underline{x} = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))\,. \tag{35}$$

- $d = 2$, $k = 1$: Die 1-Form $\omega = (f_1, f_2)$ entspricht einem Vektorfeld $\underline{f}$, und $\int_\gamma \omega = \int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x}$ für eine Kurve γ. Jede 2-Form in 2d ist von der Form $g(x_1, x_2)\, dx_1 \wedge dx_2$; wir finden, dass $d\omega = (\partial_2 f_1 - \partial_1 f_2) dx_1 \wedge dx_2$. Daher ist (34) gerade der Integralsatz von Green (oder Stokes in 2d).

- $d = 3$, $k = 0$: Liefert (35) in 3d.

- $d = 3$, $k = 1$: Die 1-Form $\omega = (f_1, f_2, f_3)$ entspricht einem Vektorfeld $\underline{f}$, und ihre äußere Ableitung

$$d\omega = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 & \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 \\ \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 & 0 & \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 & \partial_3 f_2 - \partial_2 f_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

  hat dieselben Komponenten wie rot $\underline{f}$, und tatsächlich ist $\int_{\mathcal{F}} \omega = \int_{\mathcal{F}} \mathrm{rot}\, \underline{f} \cdot d\underline{S}$, während wieder $\int_\gamma \omega = \int_\gamma \underline{f} \cdot d\underline{x}$; (34) ist also der Satz von Stokes in 3d.

- $d = 3$, $k = 2$: Die 2-Form ω hat 3 unabhängige Komponenten f_1, f_2, f_3 gemäß

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & f_3 & -f_2 \\ -f_3 & 0 & f_1 \\ f_2 & -f_1 & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{37}$$

  und es gilt

$$d\omega = (\mathrm{div}\, \underline{f})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,. \tag{38}$$

  Da wieder $\int_{\partial\mathcal{F}} \omega = \int_{\partial\mathcal{F}} \underline{f} \cdot d\underline{S}$, liefert (34) nun den Satz von Gauß in 3d.