

LINEARE ALGEBRA 1 ÜBUNGSBLATT 1

Aufgabe 1: Schnitt zweier Geraden (20 Punkte)

a) Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 :

$$M_1 = \{(-1, 0) + t(3, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$M_2 = \{(4, -7) + t(1, -4) : t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Bestimmen Sie durch Rechnung die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$.

Aufgabe 2: Cartesisches Produkt (20 Punkte)

(a) Wir benutzen die Notation $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Zeichnen Sie in getrennte Diagramme folgende 4 Teilmengen von \mathbb{R}^2 : $[2, 5] \times [3, 4]$; $\{2, 5\} \times \{3, 4\}$; $[2, 5] \times \mathbb{R}$; $\{2, 5\} \times \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie: Ist I eine Menge (genannt die Indexmenge) und sind A_i, B_i für jedes $i \in I$ Mengen, dann gilt

$$\bigcap_{i \in I} (A_i \times B_i) = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right),$$

aber es kommt vor, dass

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \times B_i) \neq \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right).$$

(Man sagt hierbei, es gelte "im Allgemeinen \neq ", was bedeutet, dass nicht immer $=$ gilt.)

Aufgabe 3: Äquivalenzrelationen (30 Punkte)

Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf M ? Begründen Sie Ihre Antworten.

- a) $M = \mathbb{Z}$, $a|b$ ("a teilt b") $:\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Z} : ar = b$ c) $M = \mathbb{Z}$, aRb $:\Leftrightarrow |a - b| \leq 1$
b) $M = \mathbb{Q}$, $a \leq b$ d) $M = \mathbb{Q}$, aSb $:\Leftrightarrow a^2 = b^2$

Aufgabe 4: Restklassen und Körper (30 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass \mathbb{Z}_2 ein Körper ist.

b) Zeigen Sie, dass \mathbb{Z}_{15} kein Körper ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $[3]$ kein multiplikativ Inverses besitzt. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass in einem Körper \mathbb{K} für jedes $x \in \mathbb{K}$ gilt $x \cdot 0 = 0$.

Aufgabe 5: Spiegelungen (freiwillige Zusatzaufgabe, nicht abgeben)

Wenn ich ein T-Shirt mit Aufschrift trage, dann erscheint im Spiegel rechts und links vertauscht, aber nicht oben und unten. Warum? (Der Spiegel weiß schließlich nicht, welche Richtung oben ist, zumal ich ihn drehen kann, und Gravitation spielt für die Spiegelung doch keine Rolle.)

Abgabe: in Zweiertteams bis 16:00 Uhr am Mittwoch den 22.04.2026 an Ihren Übungsleiter.