

LINEARE ALGEBRA 1: ÜBUNGSBLATT 10

Aufgabe 41: Verschiedenes zu Eigenwerten (40 Punkte)

Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ und λ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenraum $E_\lambda \subseteq \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie:

- (a) λ ist ein Eigenwert von A^T mit Vielfachheiten $a_{A^T}(\lambda) = a_A(\lambda)$ und $g_{A^T}(\lambda) = g_A(\lambda)$.
- (b) Sei A regulär, dann ist $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} Eigenwert zu A^{-1} . Geben Sie den zugehörigen Eigenraum an.
- (c) $\bar{\lambda}$ ist Eigenwert von $\bar{A}$. Geben Sie auch hier den zugehörigen Eigenraum an.
- (d) Sei A nilpotent, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $A^m = 0$. Zeigen Sie, dass daraus folgt $\lambda = 0$.

Aufgabe 42: Fibonacci-Zahlen (20 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und die Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Hinweis: Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie A , um A^n zu berechnen.

Aufgabe 43: Orientierung von Basen (20 Punkte)

Betrachten Sie einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum V der Dimension n und die Menge $B(V)$ aller geordneten Basen von V . Zwei Elemente $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in B(V)$ mit $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ heißen gleichorientiert, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, wenn der durch $La_i = b_i$ festgelegte Endomorphismus $L : V \rightarrow V$ positive Determinante hat.

- (a) Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $B(V)$ festlegt.
- (b) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

Aufgabe 44: L^2 -Skalarprodukt (20 Punkte)

Zeigen Sie, dass auf dem Funktionenraum $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ der stetigen komplex-wertigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ durch

$$\langle u, v \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)} v(x) dx$$

ein Skalarprodukt definiert wird. (Das Integral einer komplex-wertigen Funktion f kann definiert werden durch $\int f(x) dx = \int \operatorname{Re} f(x) dx + i \int \operatorname{Im} f(x) dx$.) Zeigen Sie weiter, dass die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ein Orthonormalsystem bilden. Wir definieren hier die komplexe e-Funktion durch die Euler-Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass für stetige Funktionen $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|f(x_0)| > \varepsilon > 0$ für ein $x_0 \in [-\pi, \pi]$ eine offene Umgebung von x_0 existiert, so dass auf dieser Umgebung gilt $|f(x)| \geq \varepsilon$. Weiter dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass $e^{ix} e^{iy} = e^{ix+iy}$ und dass die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto \bar{z}$ eine stetige Abbildung ist.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch, 1.7.2026.