

LINEARE ALGEBRA 1: ÜBUNGSBLATT 11

Aufgabe 45: Paralleler und senkrechter Anteil (30 Punkte)

- a) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt, $W \subseteq V$ ein Unterraum und $v \in V$ beliebig. Wir betrachten Zerlegungen der Form $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ mit $v_{\parallel} \in W$ und $\langle w, v_{\perp} \rangle = 0$ für alle $w \in W$. Zeigen Sie, dass diese Zerlegung für jedes $v \in V$ eindeutig ist (es also nicht mehr als eine Möglichkeit für $v_{\parallel}$ und $v_{\perp}$ geben kann). Die Existenz der Zerlegung für endlich-dimensionales W wurde in der Vorlesung gezeigt (Satz 6.13 mit Korollar 6.14(a)).
- b) Der Vektor $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $n > 1$, definiere nun den Unterraum W durch $W := \text{span}\{w\} \subset \mathbb{R}^n$. Außerdem sei $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Finden Sie Formeln für $v_{\parallel}$ und $v_{\perp}$ in Begriffen von v und w .
- c) Auf $\mathbb{R}^3$ betrachten wir das Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$. Sei $W := \text{span}\{(1, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ und $v := (2, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $v_{\parallel}$ und $v_{\perp}$.

Aufgabe 46: Projektion (45 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension $n < \infty$, und seien V_1, V_2 Unterräume mit $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und $V_1 + V_2 = V$.

- a) Zeigen Sie, dass jedes $v \in V$ sich auf eindeutige Weise als $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ schreiben lässt. Man bezeichnet daher $P(v) := v_1$ als Projektion von v auf V_1 entlang V_2 .
- b) Zeigen Sie, dass $P^2 = P$.
- c) Zeigen Sie, dass $V_1 = \text{Bild } P$ und $V_2 = \text{Kern } P$. (Insbesondere kann man V_1 und V_2 aus P bestimmen.)
- d) Zeigen Sie umgekehrt, dass es für jeden Endomorphismus $P \in \mathcal{L}(V)$ mit $P^2 = P$ Unterräume V_1 und V_2 gibt mit $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, $V_1 + V_2 = V$ und $P(v) = v_1$.
- e) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V , V_1 ein Unterraum und $V_2 = V_1^{\perp}$. Zeigen Sie, dass $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. In der Vorlesung wird gezeigt, dass $V_1 + V_2 = V$. Man bezeichnet in diesem Fall P als orthogonale Projektion.
- f) Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von e) weiter, dass $\langle u, Pv \rangle = \langle Pu, v \rangle \forall u, v \in V$.
- g) Zeigen Sie umgekehrt, dass für jede Projektion P mit $\langle u, Pv \rangle = \langle Pu, v \rangle \forall u, v \in V$ gilt: $V_2 \subseteq V_1^{\perp}$. (Wegen $\dim V_1^{\perp} = n - \dim V_1$ folgt daraus weiter, dass $V_2 = V_1^{\perp}$.)

Hinweis: Teile dieser Aufgabe sind verwandt mit Aufgabe 18 von Blatt 4.

Aufgabe 47: Gram-Schmidt-Verfahren (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass auf dem $\mathbb{R}^2$ durch $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle := 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren für die Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und das oben definierte Skalarprodukt durch.

Vokabeln: Eigenwert = eigenvalue (selten: proper value), Eigenvektor = eigenvector (selten: proper vector), Eigenraum = eigenspace (selten: proper space), Vielfachheit = multiplicity, diagonalisierbar = diagonalizable, Spur = trace, Skalarprodukt = scalar product oder inner product (oder dot product), positiv definit = positive definite [definit], Hermitesch = Hermitian, euklidischer Raum = Euclidean space [jʊkliˈdiːən], Orthonormalbasis = orthonormal basis, Betrag/Länge/Norm eines Vektors = magnitude/length/norm, Einheitsvektor = unit vector, normierter Raum = normed space, Orthonormierungsverfahren = orthonormalization procedure, Isometrie = isometry [ai̯ʃoˈmetri], unitär = unitary, adjungierte Matrix = adjoint matrix, selbst-adjungiert = self-adjoint, Dualraum = dual space.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch, 8.7.2026.